

সম্মল গণিত-জ্যামিতি।



সম্মেলন গণিত।

১০/১১/১৩
৩২২৮
তৃতীয় ভাগ।

জ্যামিতি।

শ্রীসার গুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়, কেটি,
এম-এ, ডি-এল, পিএচ্-ডি,
প্রণীত।

Calcutta
S. K. LAHIRI & CO.
56, COLLEGE STREET
1914.

Printed and published by J. C. GHOSH for MESSRS. S. K. LAHIRI & Co.,
at the CORRON PRESS, 57 Harrison Road, Calcutta.

বিজ্ঞাপন ।

বঙ্গভাষায় সরল জ্যামিতির পুস্তকের মধ্যে সর্বপ্রথমে বোধ হয় ৮কুমারমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় মহাশয়ের প্রণীত ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রথম ছয় অধ্যায়ের অনুবাদ প্রকাশিত হয়। তাহার পব ঐ গ্রন্থের আবণ্ড কয়েক খানি অনুবাদ প্রকাশিত হয়, তন্মধ্যে শ্রীযুক্ত ব্রহ্মমোহন মল্লিক মহাশয়ের প্রণীত অনুবাদ বিশেষ উল্লেখ যোগ্য। ইহাতে ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রথম ছয় অধ্যায় এবং একাদশ ও দ্বাদশ অধ্যায়ের কিয়দংশ আছে। কিন্তু সেই সম্পূর্ণ সংস্করণ এখন হুত্ৰাপ্য, কেবল প্রথম তিন চারি অধ্যায়ই সচবাচর পাওয়া যায়। তদন্তিন্ন, ইউক্লিডের জটিলতা ও বাহুল্য দোষ পরিত্যাগ পূর্বেক কিঞ্চিৎ নূতন প্রণালীতে একখানি জ্যামিতির গ্রন্থ ৮বামকমল তট্টাচার্য্য মহাশয় কর্তৃক প্রণীত হয়। তবে তাহাতে কতকগুলি কথা অতি সংক্ষেপে আলোচিত হইয়াছে, এবং ঞনায়ত্তনের কোন কথাই আলোচিত হয় নাই। সে গ্রন্থখানিও এখন হুত্ৰাপ্য।

ইউক্লিডের জ্যামিতি বহুশতাব্দী ব্যাপিয়া সরল জ্যামিতির একমাত্র পাঠ্য পুস্তক বলিয়া গৃহীত ও প্রচাৰিত হইয়া আসিতে ছিল। সেই পুস্তকের অনেক গুণ আছে, কিন্তু দোষও আছে। ইউক্লিডের প্রমাণ প্রণালীর যেমন সম্পূর্ণতা ও বিশুদ্ধতাগুণ আছে, তেমনই তাহার জটিলতা ও বাহুল্য দোষও আছে। এবং তাঁহার প্রতিজ্ঞা পারস্পর্য্য যেমন পবস্পরের অপেক্ষিতাব প্রতি লক্ষ্য রাখিলে অশৃঙ্খলাবদ্ধ বলিয়া মনে হয়, তেমনই প্রতিজ্ঞার বিষয়ের প্রতি দৃষ্টি করিলে শৃঙ্খলাবিহীন বলিয়া বোধ হয়। একই বিষয় সংসৃষ্ট ছুটি প্রতিজ্ঞা অনেক স্থলে পর পর না থাকিয়া দশ বারটি প্রতিজ্ঞার অন্তরে, কখনও বা ভিন্ন ভিন্ন আধ্যায়ে, আলোচিত হইয়াছে। ইহাতে এক একটি প্রতিজ্ঞার পৃথক্ ভাবে উপপত্তি বোধ বলিও কিঞ্চিৎ সহজ হইয়াছে, কিন্তু তাহাদের সমষ্টির সংসৃষ্টভাবে সম্বন্ধের উপলব্ধি হওয়ার বাধা জন্মিয়াছে। এবং জ্যামিতি শিক্ষা দুরূহ বলিয়া লোকের ধারণা হইয়াছে।

এই সমস্ত কারণে ইউরোপের জ্যামিতির পরিবর্তে কিঞ্চিৎ নূতন প্রণালীতে ইংরাজি ও অস্ত্রান্ত ইউরোপীয় ভাষায় অধুনা অনেকগুলি জ্যামিতির গ্রন্থ রচিত হইয়াছে। আমিও ইংরাজি ভাষায় ঐরূপ একখানি জ্যামিতি রচনা করিয়াছি। তাহাতে প্রমাণ প্রণালীর বিস্তৃততা ও সরলতা রক্ষা করিয়া, আবশ্যকীয় বিষয়গুলির আলোচনা সজ্জিশ্রু, ও প্রতিজ্ঞাগুলির পারস্পর্য্য স্পষ্টলাভ, করিতে যথাসাধ্য বদ্ধ করিয়াছি।

এই পুস্তকখানি আমার প্রণীত সেই সরল জ্যামিতির বঙ্গভাষায় অনুবাদ। ইহাতে কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের আই-ই এবং আই-এসসি পরীক্ষা পর্য্যন্ত আবশ্যকীয় বিষয় সমস্তই আছে, এবং তদন্তিরিক্ত আবও কোন কোন বিষয় আছে।

বাংলা ভাষায় এখনও এ প্রণালীতে রচিত জ্যামিতির কোন পুস্তক প্রকাশিত হয় নাই। বঙ্গভাষায় এখন নানা বিষয়ে নানাবিধ গ্রন্থ রচিত হইতেছে। আধুনিক প্রণালীর একখানি জ্যামিতির বাংলা গ্রন্থ রচিত হওয়া বাঞ্ছনীয়, এই মনে করিয়া আমার ইংরাজি সরল জ্যামিতির এই বাংলা অনুবাদ প্রস্তুত ও প্রকাশিত করিলাম। ইহা পণ্ডিত ও প্রচারিত হইবে কি না বলিতে পারি না। ইতি।

নারিকেলডাঙ্গা, }
৬ই বৈশাখ ১৩২১।

শ্রীগুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়।

সূচীপত্র ।

বিষয়

পৃষ্ঠা

প্রথম অধ্যায়

ঋজুরেখা, কোণ, এবং ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র ।

প্রথম পরিচ্ছেদ । পরিভাষা, স্বতঃসিদ্ধ, এবং স্বীকৃত কথা ।

১। পরিভাষা	১
২। স্বতঃসিদ্ধ	৬
৩। স্বীকৃত কথা	৮

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ । উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। সম্পাতী ঋজুরেখা ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১ (ইউক্লিড্, ১, ১৩)	১২
" " ২ (" ১, ১৪)	১৪
" " ৩ (" ১, ১৫)	১৬
" " ৪ (" ১, ১৬) ..	১৭

২। সমান্তর ঋজুরেখা ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫ (ইউক্লিড্, ১, ২৭, ২৯)	১৯
" " ৬ (" ১, ২৮, ২৯)	২১
" " ৭ (" ১, ৩০)	২৩

৩। ত্রিভুজের কোণের ও বাহুর
পরস্পর সম্বন্ধ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮ (ইউক্লিড্ ১, ৩২)	২৫
" " ৯ (" ১, ৫, ৬) ..	৩০
" " ১০ (" ১, ১৮, ১৯) . .	৩২
" " ১১ (" ১, ২০)	৩৪

বিবরণ	পৃষ্ঠা
৪। সর্ববিশেষ সমান ত্রিভুজ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২ (ইউক্লিড্, ১, ৪)...	৩৬
" " ১৩ (" ১, ৮)...	৩৮
" " ১৪ (" ১, ২৬) ...	৪০
" " ১৫	৪২
৫। অসমত ত্রিভুজদ্বয়ের একটি উদাহরণ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৬ (ইউক্লিড্, ১, ২৪, ২৫) ...	৪৪
৬। সামান্তরিক ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৭ (ইউক্লিড্, ১, ৩৪) . . .	৪৬
৭। সামান্তরিকের ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৮ (ইউক্লিড্, ১, ৩৫) .. .	৪৯
" " ১৯ (" ১, ৩৬) ..	৫১
" " ২০ (" ১, ৩৭, ৩৯) .	৫২
৮। ত্রিভুজের এক বাহুর উপস্থিত বর্গক্ষেত্র ও অপর বাহুদ্বয়ের উপস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমতুল্য ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২১ (ইউক্লিড্, ১, ৪৭) ...	৫৭
" " ২২ (" ১, ৪৮) ..	৬২
" " ২৩ (" ২, ১২, ১৩) ..	৬৬
৯। আয়ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২৪ (ইউক্লিড্, ২, ৪) .	৬৮
" " ২৫ (" ২, ৫) ..	৭০
" " ২৬ (" ২, ৬) ..	৭২

বিষয়	পৃষ্ঠা
তৃতীয় পরিচ্ছেদ । সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।	
১। ত্রিভুজ অঙ্কন ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড্, ১, ২২)	৭৪
" " ২ (" ১, ২৩) ..	৭৬
২। কোণও ঋজুরেখা সমান্তরাল করণ ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৩ (ইউক্লিড্, ১, ২)	৭৯
" ৪ (" ১, ১০)	৮১
৩। সমান্তরাল ও লম্ব ঋজুরেখা অঙ্কিত করণ ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৫ (ইউক্লিড্, ১, ৩১)	৮৩
" ৬ (" ১, ১১, ১২)	৮৪
৪। ঋজুরেখা সমভাগে বিভক্ত করণ ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৭	৮৬
৫। নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র, সামান্তরিক ও ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৮ (ইউক্লিড্, ২, ১১)	৮৮
" " ২ (" ১, ৪২)	৯০
" " ১০	৯১
" " ১১ (" ২, ১৪)	৯২
৬। একটি বিশেষ প্রকার সমান্তরাল ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ ।	
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২ (ইউক্লিড্, ২, ১০)	৯৪
চতুর্থ পরিচ্ছেদ । অনুশীলনার্থ উদাহরণ মালা	৯৬

দ্বিতীয় অধ্যায়।

বৃত্ত।

বিষয়

পৃষ্ঠা

প্রথম পরিচ্ছেদ। পরিভাষা।

১০২

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। জ্যা ও একহস্তস্থ বিম্বু।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ৩, ৩) . ১১১

" " ২ . . ১১৩

" " ৩ (" ৩, ২২) . ১১৬

" " ৪ (" ৩, ১৪) . . ১২০

২। সমান হস্তে সমান কোণ ও

সমান জ্যা।।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৫ (ইউক্লিড, ৩, ২৬, ২৭) . ১২২

" " ৬ (" ৩, ২৮, ২৯) . . ১২৪

৩। স্পর্শিনী ও পরস্পর স্পর্শী বৃত্ত।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৭ (ইউক্লিড, ৩, ১৬) . . . ১২৬

" " ৮ . . ১২৮

" " ৯ (" ৩, ১৩, ১২, ১১) . . ১৩০

৪। স্বত্বস্থিত কোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১০ (ইউক্লিড, ৩, ২০) . . ১৩২

" " ১১ (" ৩, ৩১) . . ১৩৪

৫। সম্পাতী জ্যা ও ছেদিনী।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২ (ইউক্লিড, ৩, ৩৫, ৩৬) . . ১৩৮

৬। হস্তের অন্তর্ভুক্ত ও বহির্ভুক্ত

বহুভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৩ . . . ১৩৮

" " ১৪ . . . ১৩৯

তৃতীয় পরিচ্ছেদ । সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। হস্তের কেন্দ্রনির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ৩, ১) ১৪১

২। হস্তের স্পর্শিনী অঙ্কিতকরণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ২ (ইউক্লিড, ৩, ১৭) ১৪২

৩। নির্দিষ্ট নিয়মাবলীন হস্তাঙ্ক
অঙ্কিতকরণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৩ (ইউক্লিড, ৩, ৩৩) . . . ১৪৩

৪। চাপ সমন্বিতকরণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৪ (ইউক্লিড, ৩, ৩৫) ১৪৪

৫। নির্দিষ্ট নিয়মাবলীন হস্ত অঙ্কিত
করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৫ ১৪৫

“ ” ৬ ১৪৬

৬। হস্তের অন্তরে ও বাহিরে ঋজু
বৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিতকরণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৭ (ইউক্লিড, ৮, ২, ৩, ৬, ৭, ১১, ১২, ১৫) .. ১৪৮

৭। হস্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৮ ১৫০

চতুর্থ পরিচ্ছেদ । অমূল্যলিখিত উদাহরণ
মালা ১৫২

তৃতীয় অধ্যায় ।

সমানুপাতী আয়তন এবং সদৃশ ক্ষেত্র ।

বিবরণ	পৃষ্ঠা
প্রথম পরিচ্ছেদ । পরিভাষা .	১৬২
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ । উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।	
১। ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর দ্বারা বাহুদ্বয়ের বিভাগ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ৬, ২)	১৬৬
২। শীর্ষকোণ সমদ্বিখণ্ডকারী রেখা দ্বারা ত্রিভুজের ভূমি বিভাগ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২ (ইউক্লিড ৬, ৩, এ)	১৬৮
৩। সদৃশ ত্রিভুজ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৩ (ইউক্লিড, ৬, ৪, এ)	১৭১
“ “ ৪ (“ ৬, ৬) ..	১৭৩
“ “ ৫ (“ ৬, ৭) .. .	১৭৫
৪। সদৃশ বহুভুজ ও ত্রিভুজ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৬ (ইউক্লিড, ৬, ২০) .	১৭৭
“ “ ৭ “ .	১৭৯
“ “ ৮ (“ ৬, ১২, ২০) .	১৮১
৫। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণস্থিত ক্ষেত্র এবং বাহুদ্বয়স্থিত সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সম্বন্ধ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৯ (ইউক্লিড, ৬, ৩১) ..	১৮৩
৬। স্বতন্ত্রস্থে অঙ্কিত চতুর্ভুজের বাহুর ও কর্ণের অন্তর্গত আয়তনের সম্বন্ধ ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১০ (ইউক্লিড, ৬, ডি)	১৮৫

বিষয়

পৃষ্ঠা

তৃতীয় পৰিচ্ছেদ । সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। নির্দিষ্ট অনুপাতে স্বাক্ষরেখার
বিভাগ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ৬, ১০) .. ১৮৭

২। চতুর্থ, তৃতীয়, ও মধ্যসমানু-
পাতী নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ২ (ইউক্লিড, ৬, ১২) . ১৮৮

.. " ৩ (" ৬, ১৩) ১৮৯

৩। নির্দিষ্ট প্রকারের ও নির্দিষ্ট পরি-
মাণের ক্ষেত্র অঙ্কিতকরণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৪ (ইউক্লিড, ৬, ২৫) .. ১৯০

৪। নির্দিষ্ট নিয়মাধীন ত্রিভুজের
শীর্ষবিন্দুর নিম্নত স্থান নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৫ . .. ১৯২

৫। স্বতন্ত্র ক্ষেত্রফল নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৬ ১৯৪

চতুর্থ পৰিচ্ছেদ । অনুশীলনার্থ উদাহরণ-
মালা ।

১৯৮

চতুর্থ অধ্যায় ।

সমতল ও ঘনায়তন ।

বিষয়	পৃষ্ঠা
প্রথম পরিচ্ছেদ । পরিভাষা ।	২০০
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ । উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।	
১। এক সমতলস্থ ঋজুরেখা ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ১১, ১)	২০৩
" " ২ (" ১১, ২)	২০৪
২। দুই সমতলের ছেদরেখা ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৩ (ইউক্লিড, ১১, ৩)	২০৬
৩। সমতলের উপর লম্ব ঋজুরেখা ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৪ (ইউক্লিড, ১১, ৪)	২০৭
" " ৫ (" ১১, ৫)	২০৯
" " ৬ (" ১১, ৬, ৬)	২১০
" " ৭ " " "	২১২
৪। স্থানে সমান্তর ঋজুরেখা ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৮ (ইউক্লিড, ১১, ৯)	২১৩
৫। সমতলে ঋজুরেখার প্রক্ষেপণী ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৯	২১৪
৬। পরস্পর সমান্তর ও লম্ব ঋজুরেখা ও সমতল ।	
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১০	২১৫
" " ১১ (ইউক্লিড, ১১, ১৮)	২১৬
" " ১২ (" ১১, ১৯)	২১৭
" " ১৩ (" ১১, ১৬)	২১৮
" " ১৪ (" ১১, ১৭)	২১৯

সূচীপত্র ।

৮৫/০

বিষয়

পৃষ্ঠা

৭। ত্রিপ্রষ্ঠ্য অনকোণ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৫ (ইউক্লিড, ১১, ২০) ২২২

" " ১৬ (" ১১, এ, বি) ২২৪

৮। কুজ্জ অনকোণ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৭ (ইউক্লিড, ১১, ২১) ২২৬

৯। ফলক, সামান্তরিক পৃষ্ঠ, ও সূচীর অনফল ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৮ ২২৯

" " ১৯ (ইউক্লিড, ১১, ২২, ৩০) ২৩২

" " ২০ (" ১২, ৫, ৬, ৭) .. ২৮৬

১০। ব্রহ্মসূচী, স্তম্ভ, ও গোলকের অনফল ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২১ (ইউক্লিড, ১২, ১০) ২৩৯

" " ২২ ২৪১

তৃতীয় পরিচ্ছেদ । সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। সমতল ও ঋজুরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ (ইউক্লিড, ১১, ১১) ২৪৪

" " ২ ২৪৫

২। সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্রপৃষ্ঠ অনাস্রতন অঙ্কিত করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ৩ ২৪৬

চতুর্থ পরিচ্ছেদ । অনুশীলনার্থ উদাহরণ মালা ।

২৪৭



তৃতীয় ভাগ।

জ্যামিতি।

প্রথম অধ্যায়।

ঋজুরেখা, কোণ, এবং ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

পরিভাষা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকৃতকথা।

১। পরিভাষা।

১। গণিতের যে ভাগে ঘনায়তন, পৃষ্ঠ, কোণ, রেখা, ও বিন্দুর বিষয়ের আলোচনা আছে তাহাকে **জ্যামিতি** বলে।

২। বাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ আছে তাহাকে **ঘনায়তন** বলে।

৩। বাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে তাহাকে **পৃষ্ঠ** বা **তল** বলে।

টিপ্পনী। ঘনায়তনের সীমা বা উপরিভাগ পৃষ্ঠ, কারণ সেই সীমা বা উপরিভাগের বেধ নাই, কিন্তু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে।

৪। বাহার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নাই, তাহাকে **রেখা** বলে।

টিপ্পনী। পৃষ্ঠ বা তলের সীমা রেখা, কারণ সেই সীমার বেধ নাই, প্রস্থও নাই, কিন্তু দৈর্ঘ্য আছে।

৫। বাহ্যার বিহুতি নাই, কেবল অবস্থিতি আছে, তাহাকে **বিন্দু** বলে।

টিপ্পনী। রেখার সীমা বিন্দু, কারণ সেই সীমার বেধ নাট, গ্রন্থ নাট, বৈধাও নাট, কিন্তু অবস্থিতি আছে।

৬। যে রেখার সমস্তই কেবল একদিকগামী তাহাকে **স্বাত্মু** বা **সম্মতল** রেখা বলে।

৭। যে পৃষ্ঠ বা তলে যে কোন দুই বিন্দুর যোজক ঋজুবেধা সম্পূর্ণরূপে সেই তলের উপর থাকে তাহাকে **সম্মতল** বলে।

৮। যদি দুই ঋজুবেধা এক ঋজুরেখার না থাকিয়া মিলিত হয়, তাহা হইলে তাহাদিগকে পৰস্পরের প্রতি **অবনত** বলে, এবং তাহাদের অবনতিকে **সম্মতল স্বাত্মু-নৈখিক কোণ** বলে।



৯। যদি দুই ঋজুবেধা এক সমতলে থাকে, এবং উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্দ্ধিত করিলেও কোন দিকে মিলিত না হয়, তাহা হইলে তাহাদিগকে **সম্মান্তর স্বাত্মুবেধা** বলে।



১০। যদি একটি ঋজু রেখা আর একটি ঋজু রেখার উপর এমনভাবে দণ্ডায়মান থাকে যে সন্নিহিত কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে সেই কোণদ্বয়ের প্রত্যেককে **সম্মকোণ** বলে, এবং রেখাদ্বয়ের প্রত্যেককে অপরটির উপর **লম্ব** বলে।



টিপ্পনী (১)। দুই ঋজুরেখার সমান্তর কোণের পরিমাণ দ্বিগুণপূর্ণার্থে, রেখাদ্বয়ের একটিকে অপরটির সহিত মিলিত করিয়া পরে তাহাদ্বয়ের সম্মত বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া সেই রেখাকে কতদূর ঘুরাইলে সে স্বস্থানে উপনীত হয় তৎপ্রতি দুই ঘূর্ণন, সেই ঘূর্ণনের অজ্ঞতা বা অবিদ্য কোণের পরিমাণনির্ণায়ক বলিয়া দেখা যাইবে। এবং এ ভাবে দেখিলে, কোণ পরিমাণে দুই সমকোণেরও অধিক হইতে পারে।

(২)। যে কোন রেখার নামকরণ তাহার আদি ও অন্তিম অক্ষরের দ্বারা হয়। যথা রেখা **কখ**। অন্ত রেখার সহিত অসংলগ্ন রেখার নামকরণ একটি অক্ষর দ্বারা হইতে পারে। যথা বেধা **ক**।



কোণের নামকরণ তিনটি অক্ষরের দ্বারা হইয়া থাকে, তাহার আদি ও অন্ত্য অক্ষর দুইটি কোণের বাহুদ্বয়ের অসংলগ্ন সীমাবিন্দুদ্বয়ে স্থিত, ও মধ্যঅক্ষর বাহুদ্বয়ের সম্মিলনবিন্দু-স্থিত। যথা কোণ **গকখ**। কোন বিন্দুতে একটিনাত্র কোণ থাকিলে তাহাকে সেই বিন্দুস্থিত একটি অক্ষরের দ্বারা অভিহিত করা যায়। যথা কোণ **ক**।

১১। সমকোণ অপেক্ষা ছোট কোণকে **সূক্ষ্মকোণ** বলে।



১২। সমকোণ অপেক্ষা বড় কোণকে **স্থূলকোণ** বলে।



১৩। ঋজুরেখা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **ঋজু ত্রৈশিক ক্ষেত্র** বলে। তিনটি রেখাবেষ্টিত হইলে তাহাকে **ত্রিকোণ** বা **ত্রিভুজ**, চারিটি রেখা বেষ্টিত হইলে **চতুর্ভুজ**, এবং ততোধিক রেখা বেষ্টিত হইলে **বহুভুজ** বলে।

১৪। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই সমান তাহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** বলে।



১৫। যে ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** বলে।



১৬। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই অসমান তাহাকে **বিষমবাহু ত্রিভুজ** বলে।



১৭। যে চতুর্ভুজের পরস্পর সম্মুখীন বাহু সমান্তর তাহাকে **সামান্তরিক** বলে।



১৮। যে সামান্তরিকের কোণ সমকোণ তাহাকে **আশ্রত** বলে।



১৯। যে আয়তের সকল বাহু সমান তাহাকে **সম-চতুর্ভুজ** বা **বর্গক্ষেত্র** বলে।



২০। যে সামান্তরিকের সকল বাহু সমান তাহাকে **সম-বাহুচতুর্ভুজ** বলে।



২১। যদি কোন সামন্তলিক ক্ষেত্র এক রেখাখাবা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, তাহার অভ্যন্তরীণ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমা পর্যন্ত বৃত্ত ক্ষুরেখা টানা যায় তাহার পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে সেই ক্ষেত্রকে **স্থূল** বলে, সেই রেখাকে তাহার **পরিধি** বলে, এবং সেই বিন্দুকে তাহার **কেন্দ্র** বলে।



২২। বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া উত্তর দিকে পরিধি পর্যন্ত যে কোন ক্ষুরেখা টানা যায় তাহাকে বৃত্তের **ব্যাস** বলে।

২৩। কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত যে ক্ষুরেখা টানা যায় তাহাকে **ব্যাসার্ধ** বলে।

সামান্ত টিঙ্গনী। উপরে যে সকল পারিভাবিক লক্ষণ লিপিবদ্ধ হইল, তদ্বারা জ্যামিতিতে ব্যবহৃত পারিভাবিক শব্দের অর্থ বিবৃত হইল, এবং সেই শব্দগুলি যে যে বস্তুবোধক তত্ত্ব বস্তুর অস্তিত্বও মানিয়া লওয়া হইল। অর্থাৎ, বিন্দু, রেখা, সমান্তর ক্ষুরেখা, বৃত্ত আদি শব্দাকি বুঝার তাহা জানা গেল, এবং সেই সেই শব্দ যে যে বস্তু বুঝার তত্ত্ব বস্তু আছে এবং অঙ্কিত হইতে পারে ইহাও মানিয়া লওয়া গেল।

সত্য বটে, রেখা বৃত্ত স্থূল ভাবে টানা বাড়িক না কেন তাহার কিঞ্চিৎ গ্রহণ থাকিবে, এবং বিন্দু বৃত্ত ক্ষুরেখা বস্তু হইতে হউক না কেন তাহার কিঞ্চিৎ বিস্তৃতি থাকিবে। কিন্তু সেই গ্রহণ ও সেই বিস্তৃতি ধর্মব্যা বশিষ্ঠা মনে করা যায় না। এবং তাহা না করিলে অনেক অসুবিধা ঘটে। যথা, একটি ক্ষুরেখা সমান দুই ভাগে ভাগ করিতে হইলে, তাহার মাঝখানে একটি বিন্দু অঙ্কিত করিয়া সেই ভাগ ত্রিমা সম্পন্ন করা যায়। কিন্তু সেই বিন্দুর যদি বিস্তৃতি থাকে, তাহা হইলে তাহাকে বিভক্ত করিয়া তবে রেখার ঠিক মধ্যস্থল পাওয়া যাইবে। আর সেই বিন্দু মধ্যস্থল যদি স্থূল বস্তু বিন্দুভাৱে অঙ্কিত করা যায়, সেই স্থূল বস্তু বিন্দুবৎ কিঞ্চিৎ

বিভূতি থাকিবে, এবং তাহাকে আবার বিখণ্ড না করিলে ঠিক মধ্যস্থল পাওয়া যাইবে না ।
সুতরাং বিন্দুর বিভূতি অগ্রাহ্য না করিলে ভঙ্গ ক্রিয়ার শেষ হইবে না ।

২৪। যে তত্ত্ব বিনাপ্রমাণে আপনা হইতেই প্রতীয়মান হয় তাহাকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে ।

২৫। গণিতের যে কার্য অবশ্যই করা যাইতে পারে বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া যায় তাহাকে **স্বীকৃত কথা** বলে ।

২৬। প্রমাণ দ্বাৰা উপপন্ন কবনীর কোন তত্ত্বের উক্তিকে **উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা** বলে ।

২৭। গণিতের প্রক্রিয়া দ্বাৰা সম্পাদিত করিবার কোন কার্য্যের উক্তিকে **সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা** বলে ।

২৮। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার বলা হয়, যদি একটি কথা সত্য হয়, তবে আর একটি কথা সত্য হইবে । প্রথম কথাটিকে **কল্পিত তত্ত্ব** বা **হেতু**, ও দ্বিতীয়টিকে **অনুমিত তত্ত্ব** বা **সিদ্ধান্ত**, বলা যাইতে পারে ।

যদি দুটি প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ এরূপ হয় যে প্রথমটির কল্পিত তত্ত্ব দ্বিতীয়টির অনুমিত তত্ত্ব, এবং প্রথমটির অনুমিত তত্ত্ব, দ্বিতীয়টির কল্পিত তত্ত্ব তাহা হইলে প্রতিজ্ঞাব্যয়কে পরস্পরের **পল্লিস্থিতি** বলা যায় ।

২। স্বতঃসিদ্ধ ।

১। যে যে বস্তুর প্রত্যেকে কোন একই বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান ।

২। সমানের সহিত সমান যোগ করিলে যোগফল সমান হইবে ।

৩। সমান হইতে সমান বিযুক্ত করিলে বিয়োগফল সমান হইবে ।

৪। অসমানে সমানে যোগ করিলে যোগফল অসমান হইবে ।

৫। অসমান হইতে সমান বিযুক্ত করিলে বিয়োগফল অসমান হইবে ।

৬। সমানের সমগুণিতক পরস্পর সমান ।

৭। সমানের সমান অংশ পরস্পর সমান ।

৮। অংশ অপেক্ষা সমগ্র বড় ।

৯। যে যে আরতন ঠিক মিলিত হয়, অর্থাৎ ঠিক একই স্থান পূরণ করে, তাহারা পরস্পর সমান ।

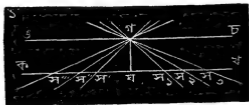
১০। দুই ঋজুরেখা কোন স্থান বেষ্টিত করিতে বা আংশিক ভাবে মিলিতে পারে না ।

১১। সকল সমকোণই সমান ।

১২। দুটি সংলগ্ন ঋজুরেখা একই ঋজুবেখার সমান্তর হইতে পারে না ।

টিপ্পনী। অধ্যাপক সেকেন্ডারের মতে সমান্তর ঋজুরেখা সবক্কে সময়ে সময়ে যতগুলি স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের উল্লেখ হইয়াছে তন্মধ্যে এইটি সর্বাপেক্ষা সহজে বোধগম্য। সেই বিবেচনার এইটি এখানে গ্রহণ করা গেল ।

পঞ্চাৎ লিখিত কথান্তলির প্রতি দৃষ্টি রাখিলে এই স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বটি বুঝিবার সুবিধা হইবে ।



মনে কর কথ্য একটি বজু রেখা, আর গুঁ তাহার বাহিরে একটি বিন্দু, এবং গুঁষ কথ্য'র উপর লখ । আরও মনে কর একটি বজু রেখা গুঁ কে কেন্দ্র করিয়া এখানে গুঁষ'র সহিত মিলিত থাকিরা পরে ঘুরিয়া ক্রমশঃ গস_১, গস_২, গস_৩, ওগচ, গস'', গস'', গস' হানে আইসে ।

সেই বর্তমান রেখার কথ্য রেখার সহিত সম্পাতবিন্দুগুলি যাহা গুঁষ'র দক্ষিণে আছে, অর্থাৎ স_১, স_২, স_৩, .. গুঁ হইতে ক্রমশঃ দূর হইতে আরও দূরে সরিয়া যাইবে, এবং শেষে যখন ঐ বর্তমান রেখা ওগচ'র হানে আসিবে তখন কথ্য'র সহিত তাহার সম্পাতবিন্দু অনন্তদূরে যাইবে । এবং তদনন্তর আর একই মাত্র বৃত্তে ঐ সম্পাতবিন্দু গুঁষ'র বামে যাইবে, ও তাহার পর ক্রমশঃ বৃত্তে সম্পাতবিন্দুগুলি ক্রমশঃ স'', স'', স' হান দিয়া ঘুর নিকটবর্তী হইবে । কেবল একটিমাত্র স্থান ওগচ আছে, যহার অবহিত হইলে ঐ বর্তমান রেখা কোনদিকেই কথ্য'র সহিত সংলগ্ন হইবে না, এবং সেই স্থানে অবস্থিতিকালে ঐ বর্তমান রেখা কথ্য রেখার অভিমুখী হইয়া দক্ষিণে কি বামে কোন দিকেই অবনত হইবে না । আব ঐ স্থানে অবহিত রেখা কথ্য'র সমান্তর হইবে ।

সামান্য টিপ্পনী (১) । স্বতঃসিদ্ধ ১ হইতে ৮ সর্বপ্রকার পরিমের রাশি সম্বন্ধে খাটে । আর ৯ হইতে ১০ স্বতঃসিদ্ধ কেবল জ্যামিতি সংক্রান্ত অর্থাৎ আরতনবিশিষ্ট রাশি সম্বন্ধে খাটে ।

(২) । নবম স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের পরিবৃদ্ধি সকল স্থলে সত্য নহে । যথা, এক যোভা পান্থকার এক পাটি অপর পাটির সহিত সমান, কিন্তু এক পাটি অপর পাটির স্থান পূরণ করিবে না, কারণ তাহাদের রেখ উঠে ।

(৩) । দশম স্বতঃসিদ্ধ বজু রেখার বজুয়ের পরীক্ষা দেখাইয়া দিতেছে । কোন একটি রেখা বজু কি না পরীক্ষা করিতে হইলে, তাহার অবিকল প্রতিকৃতি একটি অঙ্কিত করিয়া দেখ, দুইটিতে কোন স্থান বেষ্টিত করা যায় কি না । সমান বৃত্তের পরিধির অংশধর লইলে দেখা যাইবে এক ভাবে রাখিলে তাহার স্থান বেটন করে না, কিন্তু আর এক ভাবে রাখিলে তাহা স্থান বেটন করে ।

(৪) । একাদশ স্বতঃসিদ্ধ ও দশম পারিভাষিক লক্ষণ একত্র লইতে হইবে । দশম পারিভাষিক লক্ষণ হইতেই দেখা যাইতেছে সকল সমকোণই সমান ।

একাদশ স্বতঃসিদ্ধ হইতে মাটির যন্ত্রের একটি পরীক্ষা পাওয়া যাইতেছে । একটি বজুরেখা টানিয়া তাহার উপর মাটিসের একটি বাহ রাখিরা অপর বাহ অনুসারে এক রেখা টান, এবং মাটির উটাইয়া ধরিয়া সেই স্থানে তাহার সেই বাহ অনুসারে আর একটি দেখা টান । যদি ঐ দুইটি রেখা মিলিয়া যায় তবে জানিবে মাটির ঠিক আছে, নতুবা নহে ।

৩। স্বীকৃত কথা ।

স্বীকার করা যাইতে পারে যে

১। এক বিন্দু হইতে আর এক বিন্দু পর্য্যন্ত ঋজু রেখা টানা যায় ।

২। যে কোন ঋজুরেখা উভয় দিকে যথেষ্টা বর্দ্ধিত করা যায় ।

৩। যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র ও যে কোন ঋজুরেখাকে ব্যাসার্দ্ধ কবিত্বা বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় ।

৪। সসীম ঋজুরেখাকে সমান দ্বিখণ্ড করা যায় ।

৫। যে কোন কোণকে সমান দ্বিখণ্ড করা যায় ।

৬। যে কোন ঋজুবেখার উপর তৎস্থিত বা তাহাব বাহিবে স্থিত যে কোন বিন্দু হইতে একটি লম্ব টানা যায় ।

৭। যে কোন ঋজুবেখার বাহিবে স্থিত কোন বিন্দু দিয়া সেট বেখার সমান্তর ঋজুরেখা টানা যায় ।

৮। যে কোন ঋজুবেখাস্থিত বিন্দু হইতে আর একটি ঋজুবেখা এমন ভাবে টানা যায় যে উভয় বেখার মধ্যে একটি নির্দিষ্ট কোণ থাকিবে ।

টিল্পনী (১)। প্রথম ও দ্বিতীয় স্বীকৃত কথা ঋজুরেখা টানিবার নিমিত্ত রুল ব্যবহার, ও তৃতীয় স্বীকৃত কথা বৃত্ত অঙ্কিবার নিমিত্ত কম্পাস ব্যবহার, আবশ্যক বলিয়া মানিয়া লইতেছে। এবং তাহা না মানিয়া লইলে জ্যামিতির কোন সম্পাদিত অঙ্কন কাব্য সম্পন্ন হয় না।

চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে অঙ্কন কার্যগুলির সম্পাদন সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইতেছে, তাহা কেবল কতকগুলি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করণার্থে মানিয়া লওয়া হইয়াছে। এবং পরে (এই অধ্যায়ের সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা ২ হইতে ৬ পর্য্যন্ত) ততৎ অঙ্কন কার্য কেবল প্রথম, দ্বিতীয়, ও তৃতীয় স্বীকৃত কথার সাহায্যে, অর্থাৎ কেবল রুল ও কম্পাসের সাহায্যে, এবং অল্প কোন যন্ত্রের সাহায্য না লইয়া, কিরূপে সম্পাদিত হইতে পারে তাহা দর্শিত হইয়াছে।

(২)। এ স্থলে ইহাও বলা যাইতে পারে যে, চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে অঙ্কন কার্যগুলি সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইয়াছে, তাহা এত সহজে সাধ্য যে তাহা মানিয়া লওয়াতে কোন বিশেষ আপত্তি থাকিতে পারে না।

চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে যে অঙ্কনগুলি সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইয়াছে, তন্মধ্যে প্রথম তিনটি, বিনা যন্ত্রের সাহায্যেও, নিম্নলিখিতরূপে সহজে সম্পাদিত হইতে পারে।

কোন নির্দিষ্ট স্বরূপে সমন্বিত করিতে হইলে, মনে কর যে সমস্ত পৃষ্ঠে তাহা অঙ্কিত সেই পৃষ্ঠ সকল দিকে সম্পূর্ণ নতিশীল, ও বহু, অর্থাৎ মনে কর তাহা এক খণ্ড পাতলা বহু কাগজ । সেই কাগজখানি একপে ভাঁজ কর যে তদুপরি অঙ্কিত সেই স্বরূপের এক অংশ অপর অংশের উপর পড়ে, এবং তাহার একদিকের শেষ বিন্দু অপর দিকের শেষ বিন্দুর উপর পড়ে । তাহা হইলে রেখা যে বিন্দু সেই ভাঁজের উপর পড়িল সেই বিন্দু অবশ্যই রেখার মধ্যস্থান হইবে ।

কোন নির্দিষ্ট কোণকে সমন্বিত করিতে হইলে, মনে কর তাহা উক্ত রূপ কাগজে অঙ্কিত আছে । এবং সেই কাগজখানি একপে ভাঁজ কর যে ঐ কোণের এক বাহু অপর বাহুর উপর পড়ে । তাহা হইলে ভাঁজের স্বরূপে অবশ্যই ঐ কোণকে সমন্বিত ও বিস্তৃত করিবে ।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট স্বরূপের উপর লম্ব টানিতে হইলে, মনে কর ঐ বেষণ ও বিন্দু উক্ত প্রকার কাগজে অঙ্কিত, এবং সেই কাগজখানি একপে ভাঁজ কর যে ভাঁজের বেধা সেই বিন্দু দিখা যায়, এবং নির্দিষ্ট রেখার এক অংশ তাহার অপর অংশের উপর পড়ে । তাহা হইলে ভাঁজের স্বরূপে ও নির্দিষ্ট স্বরূপে যে ছুটি সম্বন্ধিত কোণ হইল তাহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে সমান, অর্থাৎ সেই ভাঁজের রেখা নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট রেখার উপর লম্ব ।

দ্বিতীয় পন্থিচ্ছেদ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

উপক্রমণিকা । ১। নিম্নের সান্বেতিক চিহ্নগুলি এই পুস্তকে ব্যবহৃত হইবে ।

বিন্দু	স্থলে	বিঃ
কজুরেখা	...	বা ঞঃরেঃ
কোণ		<
সমান্তর		
লম্ব		⊥
ত্রিভুজ বা ত্রিকোণ	..	△
সামান্তরিক	.	▭
আয়ত	...	□
সমচতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র		□ বা বঃক্ষেঃ
বৃত্ত		⊙
পরিধি		○
কারণ বা যেহেতুব		:
অন্তএব		∴
সমান		=
বড়		>
ছোট		<
কথ'র উপর বর্গক্ষেত্র		কথ'
কথ ও গম্ব লইয়া আয়ত		কথ গম্ব

কিন্তু পুস্তক পাঠ করিবার কি কোন প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিবার সময় সান্বেতিক চিহ্নগুলি যে যে শব্দেব পরিবর্তে ব্যবহৃত হইয়াছে সেই সেই শব্দ উচ্চারণ করা আবশ্যক ।

কএকটি টিহ পাঠকালে তাহার নামের সহিত আর দুই একটি শব্দ যোগ করিতে হইবে, যথা—

“কথ ॥ গঘ” পাঠ কবিত্তে হইবে “কথ সমান্তর গঘ”র সহিত”

“কথ+গঘ” “কথ লঘ গঘ”র উপর”

“কথ-গঘ” “কথ সমান গঘ”র সহিত”

“কথ>গঘ” “কথ বড় গঘ”র অপেক্ষা”

“কথ<গঘ” “কথ ছোট গঘ”র অপেক্ষা”

২। প্রতিজ্ঞাগুলি পাঠ করিবার সময় প্রত্যেক অক্ষর কার্ষ্যের প্রয়োজন ও প্রত্যেক শ্রুতিপ্রয়োগের হেতু বিজ্ঞার্থী নিজে বুঝিবার নিমিত্ত যথাসাধ্য চেষ্টা করিবেন।

৩। স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্ব ও পূর্বে প্রমাণীকৃত প্রতিজ্ঞার সত্যতা ভিন্ন অন্য কোন কথাব সত্যতা বিজ্ঞার্থী মানিয়া লইবেন না।

৪। চিত্রগুলি শুদ্ধরূপে অঙ্কিত করণার্থে বিজ্ঞার্থী বিশেষ যত্ন করিবেন। শুদ্ধরূপে অঙ্কিত চিত্র অনেক স্থলে প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করণের সাহায্য করে।

শুদ্ধরূপে চিত্রাঙ্কনের নিমিত্ত নিম্নলিখিত যন্ত্র কএকটি ব্যবহাব করা যায়।

(১) ক্লেম। (জুয়েলা টানিবার ও মাপিবার নিমিত্ত)

(২) কম্পাস। (বৃত্ত বা বৃত্তাংশ আঁকিবার নিমিত্ত)

(৩) প্রোট্রাক্টর বা চক্র। (কোণ মাপিবার নিমিত্ত)

(৪) সেট কোয়েরার বা মাটাম। (সমকোণ আঁকিবার নিমিত্ত)

কোণ মাপিবার নিমিত্ত সমকোণ বা বৃত্তের চতুর্থাংশকে ৯০ ভাগে ভাগ করা যায়, ও তাহার প্রত্যেক ভাগকে এক ডিগ্রি ১° বলে। ১° কে আবার ৬০ ভাগে ভাগ করা হয় ও প্রত্যেক ভাগকে এক মিনিট ১' বলে। এবং ১' কে ৬০ ভাগে ভাগ করা হয়, ও প্রত্যেক ভাগকে এক সেকেন্ড ১'' বলে।

$$\text{অতএব } \frac{১}{২} \text{ সমকোণ} = \frac{১}{২} \times ৯০^\circ = ৪৫^\circ,$$

$$\frac{১}{৩} = \frac{১}{৩} \times ৯০^\circ = ৩০^\circ,$$

$$\frac{১}{৪} = \frac{১}{৪} \times ৯০^\circ = ২২^\circ ৩০'।$$

৫। মনে রাখিতে হইবে, এই পুস্তকের ১ম, ২য় ও ৩য় অধ্যায়ে যে সকল বিন্দু, রেখা, কোণ ও ক্ষেত্রের উল্লেখ আছে তাহা এক সমতল স্থিত।

১। সম্পাতী ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১।

যদি এক ঋজুরেখার কোন এক বিন্দুতে দুই বিপরীত দিক হইতে দুটি ঋজুরেখা আসিয়া মিলিত হয়, এবং তাহারা এক ঋজুরেখায় থাকে, তাহা হইলে তাহারা মধ্য রেখার সহিত যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণ দ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।



১ম চিত্র

২য় চিত্র।

মনে কর ঋ: রে: $\angle KOG$, $\angle GOK$

ঋ রে: 'গ'র বিপরীত দিক হইতে আসিয়া \angle বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,
এবং একই ঋ: রে: তে আছে।

তাহা হইলে $\angle KOG$ এবং $\angle GOK$ একত্র = ২ সমকোণ।যদি $\angle KOG = \angle GOK$ (যথা ১ম চিত্রে)

তাহা হইলে তাহা বা প্রত্যেকেই একটি সমকোণ (১০ পরিভাষা),

 $\therefore \angle KOG + \angle GOK = ২ সম \angle$ ।যদি $\angle KOG$ এবং $\angle GOK$ সমান না হয় (যথা ২য় চিত্রে)ননে কব $\angle KOG + \angle GOK$ ।তাহা হইলে $\angle KOG + \angle GOK = \angle KOG + \angle GOK + \angle GOK$,এবং $\angle KOG + \angle GOK = \angle KOG + \angle GOK + \angle GOK$, $\therefore \angle KOG + \angle GOK = \angle KOG + \angle GOK$ (১ বত:সিদ্ধ) $= ২ সম \angle$ ।

অনুমান (১)। উপরের প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, দুইটি সম্পাতী স্বকুরেখাতে যে চারিটি কোণ হয় তাহারা একত্র চারিটি সমকোণেব সমান ।

অনুমান (২)। অনেকগুলি স্বকুরেখা একবিন্দুতে সংলগ্ন হইলে তাহাদের মধ্যে পর পব যে কোণগুলি থাকে তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান ।

টিপ্পনী। ক ও গ এবং গ ও খ কোণদ্বয়কে পবস্পরের **পন্নিপূন্নক** বলে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২ ।

যদি এক ঋজুরেখা সহ কোন একবিন্দুতে দুই বিপরীত দিক হইতে দুটি ঋজুরেখা আসিয়া মিলিত হয়, এবং ঋজুরেখার সহিত তাহারা যে দুটি সম্বিহিত কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ দুইটি ঋজুরেখা এক ঋজুরেখায় থাকিবে ।



মনে কর ঋঃ রেঃ \angle ক, \angle গঃ ঋঃ রেঃ \angle গ'র বিপরীত জই দিক হইতে আসিয়া গু তে মিলিয়াছে,

এবং \angle কগঃ + \angle গগঃ = ২ সম \angle ।

তাহা হইলে \angle ক এবং \angle গ একই ঋঃ রেঃ ।

কারণ, যদি তাহা না হয়,

মনে কর কগু বর্দ্ধিত করিলে ঋঃ রেঃ গু ঘ হয় ।

তাহা হইলে \angle কগঃ + \angle গগঃ = ২ সম \angle (উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১) ।

কিন্তু \angle কগঃ + \angle গগঃ = ২ সম \angle (কল্পনা অনুসারে) ।

\therefore এই সমান সমষ্টিদ্বয় হইতে \angle কগঃ বাদ দিলে,

$$\angle$$
 কগঃ = \angle গগঃ (স্বতঃসিদ্ধ ৩),

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর \angle , বৃহত্তর \angle এর সমান,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না ।

অতএব গু ঘ অবশ্যই গু গ'র সহিত মিলিত হইবে,

অর্থাৎ \angle ক এবং \angle গ অবশ্যই একই ঋঃ রেঃ হইবে ।

টিপ্পনী (১)। এই প্রতিজ্ঞা ও ইহার পূর্ববর্তী প্রতিজ্ঞা পরস্পরের পরিবৃদ্ধ বা বিলোম ।

কারণ, একের করিত তত্ত্ব বা হেতু (রেখাটির একই বিন্দু রেখায় থাকে) অপরের অনুমিত তত্ত্ব বা সিদ্ধান্ত, এবং একের অনুমিত তত্ত্ব বা সিদ্ধান্ত (কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হওয়া) অপরের করিত তত্ত্ব বা হেতু ।

(২)। যে কোন বিন্দুটির এক বিন্দুবেগে দ্বাৰা সংযুক্ত হইতে, অর্থাৎ এক বিন্দুরেখায় থাকিতে, পারে ।

কিন্তু যে কোন বিন্দুটির এক বিন্দুরেখাতে থাকিতে পারে নাও পারে । উপরের বিন্দুটির, ক, ও, এবং ঞ্ এইরূপে সংস্থিত যে মধ্যবিন্দু ও দিয়া যে কোন বিন্দুরেখা ওগ টানিলে,

$$\angle কওগ + \angle গওঞ = ২ সম \angle,$$

এবং সেই সমস্তই ক, ও, এবং ঞ্, একই বিন্দুরেখায় আছে ।

যদি তিন বা ততোধিক বিন্দু একই বিন্দুরেখায় থাকে, তাহাদিগকে একরেখাচ্ছ বিন্দু বলা যায় ।

এক সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুরেখাটির সমান্তর না হইলে অবশ্যই একবিন্দুতে মিলিত হইবে । কিন্তু যে কোন বিন্দুরেখাটির এক বিন্দুতে মিলিতে পারে নাও পারে ।

যদি তিন বা ততোধিক বিন্দুরেখা একই বিন্দুতে মিলে তাহাদিগকে একবিন্দু-মুখী রেখা বলা যায় ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা- ৩।

যদি দুই স্বাক্ষরেখা পরস্পরকে ছেদ করে,
তাহা হইলে বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান
হইবে।



মনে কর ঃ রেঃ কওখ এবং গওঘ

ও তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে \angle কওগ = \angle খওঘ, \angle কওঘ = \angle খওগ।

কারণ, \angle কওগ + \angle গওখ = ২ সম \angle (উঃ প্রঃ ১),

এবং \angle খওঘ + \angle গওখ = ২ সম \angle (ঐ),

$\therefore \angle$ কওগ + \angle গওখ = \angle খওঘ + \angle গওখ।

এবং এই সমান সমষ্টির হইতে \angle গওখ বাদ দিলে,

\angle কওগ = \angle খওঘ।

ঐক্যপে দেখা যাইবে

\angle কওঘ = \angle খওগ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

যদি একটি ঋজুরেখা দুইটি সম্পাতী ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে একান্তর কোণদ্বয় অসমান হইবে, এবং যে দিকে সম্পাতী রেখাদ্বয় মিলিত হইয়াছে সেই দিকের কোণ অপর দিকের কোণ অপেক্ষা ছোট হইবে।



মনে কর ঋ: রে: গুণ্ড

সম্পাতী ঋ: রে: গুণ্ড এবং গুণ্ড'র উপর পতিত হইয়াছে।

তাহা হইলে \angle গুণ্ড $<$ \angle ঘণ্ড, এবং \angle গুণ্ড $<$ \angle গুণ্ড'।

মনে কর ঘণ্ড কে জু বিন্দুতে সমাধিগু করা হইয়াছে,

এবং জুহ = গুজু করিয়া টানা হইয়াছে,

আর হুণ্ড যোগ করা হইয়াছে।

Δ জুহ কে উল্টাইয়া Δ জুঘণ্ড'র উপরে একত্রে রাখ বে,

একের জু বিন্দু অপরের জু বিন্দুর উপর পড়ে,

এবং একের বাহু জুগ অপরের বাহু জুঘ'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে বিন্দু গু বিন্দু ঘ'র উপর পড়িবে,

কারণ জুগ = জুঘ।

এবং ঋ: রে: জুগ ঋ: রে: জুঘ'র উপর পড়িতে,

ঋ: রে: জুহ ঋ: রে: জুগ'র উপর পড়িবে,

কারণ \angle গুজুহ = \angle ঘজুগ, (উ: প্র: ৩)।

এবং বিন্দু হ বিন্দু গ'র উপর পড়িবে,

কারণ $\angle জহ = \angle গ$ ।

আর গ এবং হ বিন্দুদ্বয় ঘ এবং গ'র উপর পড়াতে,

ধঃ রেঃ গহ ধঃ রেঃ ঘগ'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০)।

অতএব $\angle জগহ < \angle জঘগ'$ র সহিত মিলিবে।

$\therefore \angle জঘগ = \angle জগহ$ (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

কিন্তু $\angle জগহ < \angle ঘগখ$,

$\therefore \angle জঘগ$ অর্থাৎ $\angle গঘগ < \angle ঘগখ$ ।

সেইরূপে দেখা যাইবে $\angle গগঘ < \angle গঘক$ ।

২। সমান্তর ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৫।

১। যদি একটি ঋজুরেখা অপর দুইটি ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, এবং একান্তর কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে ঐ দুইটি রেখা সমান্তর হইবে।

২। পরিব্রূতক্রমে, যদি একটি ঋজুরেখা দুইটি সমান্তর ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে একান্তর কোণদ্বয় সমান হইবে।



১। মনে কর ঋ: রে: কখ ঋ: রে: ওচ ও জহ'র উপর পতিত,
এবং \angle ওগঘ $=$ \angle গঘহ।

তাহা হইলে ওচ \parallel জহ।

কারণ, যদি না হয়, মনে কর ওচ এবং জহ, ঋ তে মিলিত।

তাহা হইলে \angle গঘহ $<$ \angle ওগঘ (উ: প্র: ৪),

কিন্তু তাহা অসম্ভব,

কারণ \angle গঘহ $=$ \angle ওগঘ (কল্পনামুসারে)।

অতএব ওচ এবং জহ, ঋ তে মিলিত হইতে পারে না।

ঐরূপে দেখা যাইবে তাহারা বিপরীত দিকেও

মিলিত হইতে পারে না।

অতএব তাহারা সমান্তর।

২। মনে কর, \angle খঘহ = \angle খগচ,
 অথবা \angle খগচ + \angle কঘহ = ২সম \angle ।
 তাহা হইলে \angle চ = \angle জহ।
 কারণ, $\therefore \angle$ খগচ = \angle খঘহ = \angle জঘগ (উঃ প্রঃ ৩),
 $\therefore \angle$ চ = \angle জহ (উঃ প্রঃ ৫)।
 আবার, $\therefore \angle$ খগচ + \angle কঘহ = ২ সম \angle
 = \angle কঘজ + \angle কঘহ (উঃ প্রঃ ১),
 \therefore উভয় দিক হইতে \angle কঘহ বাদ দিলে,
 \angle খগচ = \angle কঘজ,
 এবং $\therefore \angle$ চ = \angle জহ (উঃ প্রঃ ৫)।

টিপ্পনী। একটি বক্স রেখা অপর দুইটির উপর পতিত হইলে, যদি সেই দুইটি সমান্তর হয়, তাহা হইলে,

- (১) একান্তর কোণ গুলি সমান হইবে,
- (২) বাহিরের কোণ অন্তরের কোণ সমান হইবে, এবং
- (৩) অন্তরের কোণদ্বয় পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

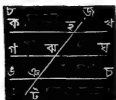
আবার পরিবৃদ্ধক্রমে, যদি উপরের লিখিত তিনটি কথার কোন একটি সত্য হয়, তাহা হইলে রেখা দুই সমান্তর হইবে।

প্রথম তথ্যটি স্বাধীন ভাবে সপ্রমাণ করা হইয়াছে, এবং অপর দুইটি প্রথমটির সাহায্যে প্রতিপন্ন করা হইয়াছে।

মনে রাখিতে হইবে যে, বাহিরের কোণ দুই যুগ্ম, অর্থাৎ চারিটি, ও অন্তরের কোণও দুই যুগ্ম, এবং প্রত্যেক যুগ্মের কোণদ্বয় পরস্পরের পরিপূরক। আর অন্তরের কোণ চতুষ্টয়কে একান্তর করিয়া লইলে একান্তর কোণও দুই যুগ্ম।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

যদি দুই ঋজুরেখার প্রত্যেকটি একই ঋজুরেখার সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহারা পরস্পরের সমান্তর হইবে।



মনে কর ঋ: রে: কখ ও গঘ উভয়ই ॥ ওচ ।

তাহা হইলে কখ ॥ গঘ।

কাৰণ, মনে কর একটি ঋ: রে: জহঝঞট ঐ তিন ঋ: রে: ব উপর পতিত ।

তাহা হইলে, ∴ কখ ॥ ওচ,

∴ ∠ কহট = ∠ জঞচ (উ: প্র: ৫)।

আবার, ∴ গঘ ॥ ওচ,

∴ ∠ জঝঘ = ∠ জঞচ (উ: প্র: ৬)।

অতএব ∠ কহট = ∠ জঝঘ (যত:সিদ্ধ ১),

এবং ∴ কখ ॥ গঘ (উ: প্র: ৫)।

অনুমান। যদি দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা অপর দুটি সম্পাতী ঋজুরেখার সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রেখাযুগ্মের অন্তর্গত কোণ দ্বিতীয়োক্ত রেখাযুগ্মের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।



উপরের চিত্রে স্পষ্ট দেখা বাইতেছে,

$$\begin{aligned} \angle p &= \angle p' \text{ ও } \angle q \text{ এর অন্তর্গত } \angle \\ &= \angle q' \text{ (উঃ প্রঃ ৬)।} \end{aligned}$$

৩। ত্রিভুজের কোণের ও বাহুর পরস্পর সম্বন্ধ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮ ।

যদি তিনটি স্বাভূতেরূপের পরস্পর ছেদে একটি ত্রিকোণ হয়, তাহা হইলে অন্তরের কোণত্রয় একত্র দুই সমকোণের সমান হইবে।



মনে কর তিনটি স্বঃ বেঃ কখ, খগ, গক'র ছেদে Δ কখগ হইয়াছে। তাহা হইলে, \angle গকখ + \angle কখগ + \angle খগক = ২ সম \angle ।

খগকে স্ব পর্বান্ত বর্দ্ধিত কর, এবং মনে কব গঙ ॥ কখ টান হইয়াছে।

তাহা হইলে, \therefore গঙ

॥ কখ,

$\therefore \angle$ গকখ

= \angle কগঙ (উঃ প্রঃ ৫),

এবং \angle কখগ

\angle গগঘ (উঃ প্রঃ ৬)।

$\therefore \angle$ গকখ + \angle কখগ + \angle খগক = \angle কগঙ + \angle গগঘ + \angle খগক
 $= \angle$ কগঘ + \angle খগক
 $= ২$ সম \angle উঃ প্রঃ ১)।

অনুমান (১)। ত্রিকোণের কোন দুই কোণ একত্রে দুই সমকোণের ন্যূন।

টিপ্পনী (১)। ত্রিকোণের একটি কোণ যদি স্থূল কোণ হয়, তবে অপর দুইটি কোণই দৃশ কোণ হইবে।

অনুমান (২)। ত্রিকোণেব কোন এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে, বাহিরের কোণ অন্তরের দূরস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টিব সমান, এবং তাহাদের যে কোন একটি অপেক্ষা বড় হইবে ।

অনুমান (৩)। যে কোন ঋজুবৈধিক ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তর্বহ কোণের সমষ্টি চারিটি সমকোণেব সহিত যোগ করিলে, যোগফল ক্ষেত্রের বাহুর দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণেব সমান হইবে ।



মনে কর একটি n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুবৈধিক ক্ষেত্র লওয়া গেল । তাহা হইলে তাহার সমস্ত অন্তরস্থ কোণ $+ ৪$ সম $\angle = ২$ n সম \angle ।

ক্ষেত্রের মধ্যে যে কোন বিন্দু \odot লইয়া তাহা ক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণেব সহিত যোগ কর ।

তাহা হইলে ক্ষেত্রটি n সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে, এবং ঐ n Δ এর \angle সমূহ $= n \times ২$ সম \angle ।

কিন্তু ঐ n Δ এর \angle সমূহ $=$ ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তর্বহ \angle
 $+ \odot$ স্থিত সমস্ত \angle ।

এবং \odot স্থিত সমস্ত $\angle = ৪$ সম \angle (উঃ প্রঃ ১, অনুমান ২) ।

\therefore ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তরস্থ $\angle + ৪$ সম $\angle = n \times ২$ সম \angle ।

অনুমান (৪)। যদি কোন ঋজুবৈধিক ক্ষেত্রের সকল অন্তরস্থ কোণই দুই সমকোণের ন্যূন হয়, এবং তাহার বাহুগুলি যথাক্রমে একদিকে বর্দ্ধিত করা যায়, তাহা হইলে যে বাহিরের কোণগুলি উৎপন্ন হইল, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হইবে ।

মনে কর ক্ষেত্রটির n সংখ্যক বাহু আছে । তাহা হইলে,

সমস্ত অন্তরস্থ $\angle +$ সমস্ত বাহিরের $\angle = n \times ২$ সম \angle ।

কিন্তু সমস্ত অন্তরস্থ $\angle + ৪$ সম $\angle = n \times ২$ সম \angle ।

\therefore সমস্ত বাহিরের $\angle = ৪$ সম \angle ।

টিপ্পনীর (২) । উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৮ ও ৬ হইতে দেখা যায় যে, যদি একটি ঋজুরেখা অপর দুইটি ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার কোন একদিকের অন্তরস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, নূন, বা অধিক, হইবে, যদি সেই রেখাদ্বয় সমান্তর, অথবা সেই দিকে মিলনমুখী, বা বিস্তারমুখী, হয়, এবং সেই নুঙ্কতা বা আধিক্যের পরিমাণ উক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সহিত সমান হইবে । যদি সমান্তর রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ শূন্য মনে করা যায়, তাহা হইলে ঐ কথাগুলি সঙ্ক্ষেপে এইরূপে বলা যাইতে পারে—যদি এক ঋজুরেখা অপর ঋজুরেখাদ্বয়ের উপর পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার একদিকের অন্তরস্থ কোণদ্বয়ে সমষ্টি ৩ দুই সমকোণের প্রত্যেক সেই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সহিত সমান ।

অনুমান (৫) । উপরে ব ৩য় অনুমানের সাহায্যে, সমবাহ সমানকোণী যে কোন ঋজুৈকিক ক্ষেত্রের কোণের পরিমাণ নিরূপণ করিতে পাওয়া যায় ।

মনে কব ক্ষেত্রের বাহুব সংখ্যা = n , তাহা হইলে,

$$\text{তাঁহাব অন্তরস্থ } \angle = \frac{2}{n} \times (2n - 8) \text{ সম } \angle$$

$$= \left(2 - \frac{8}{n}\right) \text{ সম } \angle$$

$$= ৪ \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৩,$$

$$\text{অথবা } = ১ \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৪,$$

$$\text{অথবা } = \frac{১}{২} \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৫,$$

$$\text{অথবা } = \frac{১}{৩} \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৬,$$

$$\text{অথবা } = \frac{২}{৩} \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৭,$$

$$\text{অথবা } = ১ \text{ সম } \angle, \quad \text{যদি } n = ৮,$$

$$\text{ইত্যাদি,} \quad \text{ইত্যাদি ।}$$

ইহা হইতে দেখা যাইতেছে,

$$\therefore \text{ যে কোন বিন্দুর চারিদিকের } \angle \text{ সমুহ} = ৪ \text{ সম } \angle,$$

$$\therefore \text{ সমবাহ ত্রিভুজ (সংখ্যার ৬টি),}$$

$$\text{সম চতুর্ভুজ (\quad ৪টি),}$$

$$\text{সমবাহ সমানকোণী ষড়্ভুজ (\quad ৩টি),}$$

ইহারাই কেবল মাত্র সমবাহ সমানকোণী ক্ষেত্র

যদ্বারা বিন্দুর চতুর্দিকের স্থানসমস্ত পূর্ণ হইতে পারে ।

কারণ ৫ বাহু বিশিষ্ট ক্ষেত্রের ৩টিতে স্থান পূর্ণ হইবে না, এবং
 ৪ টিতে স্থানের অতিরিক্ত হইবে,
 আর ৭ বা ততোধিক ২ টিতে স্থান পূর্ণ হইবে না, এবং
 ৩ টিতে স্থানের অতিরিক্ত হইবে ।

টিপ্পনী (৩) । মধুমক্ষিকার মধুচক্রের ঘরগুলি সমবাহু সমানকোণী ষট্‌কোণ আকারে
 নির্মিত করে, সুতরাং প্রত্যেক সংযোগ স্থানের চতুর্দিকে তিনটি করিয়া ঘর সমস্ত স্থান পূর্ণ করে,
 কোন স্থান বৃথা পড়িয়া থাকে না । এবং তাহাদের প্রায়গোল আকারের ভিত্তি রাশিবার পক্ষে
 ষট্‌কোণ ঘরই ত্রিকোণ বা চতুর্কোণ ঘর অপেক্ষা অধিক সুবিধাজনক, কারণ তাহাতে অধিক
 স্থান বৃথা পড়িয়া থাকে না ।

কুত্র মধুমক্ষিকার চক্রচলনানৈপুণ্য কি চমৎকার ।

অষ্টম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার আর একটি প্রমাণ
 এক্ষণে দেওয়া যাইবে ।

এই প্রমাণ অধ্যাপক প্রফেসর বাব দিয়াছেন ।



মনে কর কখগ একটি Δ ।

গক, কখ, ও খগ কে ক্রমান্বয়ে ঘ,ঙ,চ পর্য্যন্ত বর্ধিত কর ।

ক কে কেন্দ্র করিয়া কঘ কে \angle ঘকখ পরিমাণে ঘূর্ণাও,

তাহা হইলে কঘ, কখ'র সহিত মিলিবে ।

তদনন্তর কঘ কে কখ'র উপর চাপিত কর

যতদূর না ক বিন্দু খ'র উপর পড়ে ।

তাহার পর খ' কে কেন্দ্র করিয়া কঘ কে \angle ঙখগ পরিমাণে ঘূর্ণাও,

তাহা হইলে কঘ, খগ'র সহিত মিলিবে ।

তদনন্তর কঘ কে খগ'র উপর চাপিত কর

যতদূর না ক বিন্দু গ'র উপর পড়ে ।

তাহার পর গ' কে কেন্দ্র করিয়া ক'ষ কে \angle চ'গ'ক পরিমাণে ঘূর্ণনাও,
তাহা হইলে ক'ষ, গ'ক'র সহিত মিলিবে ।

তদনন্তর ক'ষ কে গ'ক'র উপরে চাপিত কর

যতক্ষণ না ক' বিন্দু পুনবার ক'র উপরে পড়ে ।

তাহা হইলেই ক'ষ পুনরায় পূর্বস্থানে আসিবে ।

অতএব দেখা বাইতেছে,

\angle ঘ'ক'থ + \angle ও'খ'গ' + \angle চ'গ'ক পরিমাণ ঘূর্ণনে,
এবং কিঞ্চিৎ চালনে,

ক'ষ পুনরায় পূর্বস্থানে আসিয়াছে,

এবং ঞ্জুবেথার উপর চালনে তাহার ঘূর্ণনের হ্রাসবৃদ্ধি হয় নাই ।

আর ইহাও স্পষ্ট দেখা যায় যে,

কোন ঞ্জুরেথাকে ঘূর্ণন দ্বারা পূর্বস্থানে আনিতে হইলে,
ঘূর্ণনের পরিমাণ ৪ সমকোণ হইবে ।

$\therefore \angle$ ঘ'ক'থ + \angle ও'খ'গ' + \angle চ'গ'ক $= ৪$ সম \angle ।

এবং \angle ঘ'ক'থ + \angle ও'খ'গ' + \angle চ'গ'ক

+ \angle গ'ক'থ + \angle ক'থ'গ' + \angle খ'গ'ক $= ৬$ সম \angle ।

$\therefore \angle$ গ'ক'থ + \angle ক'থ'গ' + \angle খ'গ'ক $= ২$ সম \angle ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৯।

১। যদি কোন ত্রিভুজের দুই বাহু সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের বিপরীত কোণদ্বয় সমান হইবে।

২। পরিব্রজ্যক্রমে, যদি কোন ত্রিভুজের দুই কোণ সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান হইবে।



১। মনে কর \triangle কখগ'র বাহুর কখ, কগ সমান।

তাহা হইলে \angle কগখ $= \angle$ কখগ।

মনে কর \angle কখগ, কঃ রে: কঘ দ্বারা সমবিক্ত হইয়াছে,

এবং \triangle কখগ ও: রে: কঘ অনুসারে ভাঁজ করা হইয়াছে।

তাহা হইলে, $\therefore \angle$ গকঘ $= \angle$ কখঘ,

\therefore কগ, কখ'র উপর পড়িবে,

এবং, \therefore কগ $=$ কখ, \therefore গ, খ'র উপর পড়িবে।

এবং, \therefore গওঘ, খওঘ'র সহ মিলিত,

\therefore গঘ, খঘ'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০)।

সুতরাং \angle কগঘ, \angle কখঘ'র সহিত মিলিত হইবে,

এবং $\therefore \angle$ কগখ $= \angle$ কখগ (স্বতঃসিদ্ধ ১)।

২। মনে কর \triangle কখগ'র \angle কগখ $= \angle$ কখগ,

তাহা হইলে কখ $=$ কগ।

কাষণ তাহা না হইলে কোন একটি বাহ $>$ অপব বাহ ।

মনে কব $\text{কগ} > \text{কথ}$,

এবং $\text{কঙ} = \text{কথ}$ ।

• তাহা হইলে এই প্রতিজ্ঞার পূর্বভাগ অহুসাবে,

$\angle \text{কঙথ} = \angle \text{কথঙ}$ ।

কিন্তু $\angle \text{কঙথ} > \angle \text{কগথ}$ (উঃ প্রঃ ৮, অনুমান ২),

$\therefore \angle \text{কথঙ} > \angle \text{কগথ}$ ।

এবং, $\therefore \angle \text{কথগ} > \angle \text{কথঙ}$,

$\therefore \angle \text{কথগ} > \angle \text{কগথ}$ ।

কিন্তু তাহা অসম্ভব, কাষণ তাহা কল্পনার বিপবীত ।

অতএব, কথ ও কগ অসমান নহে, অর্থাৎ তাহারা সমান ।

অনুমান । ইহা চইতে দেখা যাইতেছে, প্রত্যেক সমবাহ ত্রিভুজ অবশ্যই সমানকোণী হইবে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১০।

১। যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহু আর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২। পরিব্রূতক্রমে, যদি কোন ত্রিভুজের এক কোণ আর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম কোণের বিপরীত বাহু দ্বিতীয় কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



১। মনে কর \triangle কখগ'র বাহু কখ $>$ বাহু কগ।
তাহা হইলে \angle কগখ $>$ \angle কখগ।

মনে কর কঘ = কগ, এবং গ ও ঘ যোগ কর।

তাহা হইলে \angle কগঘ = \angle কঘগ (উঃ প্রঃ ১)।

কিন্তু \angle কগখ $>$ \angle কগঘ,

$\therefore \angle$ কগখ $>$ \angle কঘগ।

আবার \angle কঘগ $>$ \angle কখগ (উঃ প্রঃ ৮ অঃ ২),

$\therefore \angle$ কগখ $>$ \angle কখগ।

২। মনে কর \angle কগখ $>$ \angle কখগ।

তাহা হইলে কখ $>$ কগ।

কারণ তাহা না হইলে কখ = কগ অথবা $<$ কগ।

কিন্তু $\text{কথ} = \text{কগ}$ হইতে পারে না,
 কারণ তাহা হইলে $\angle \text{কগথ} = \angle \text{কথগ}$ হইত,
 এবং $\text{কথ} < \text{কগ}$ হইতে পারে না,
 কারণ তাহা হইলে $\angle \text{কগথ} < \angle \text{কথগ}$ হইত।
 $\text{কথ} > \text{কগ}$ ।

অনুমান। একটি বিন্দু হইতে একটি ঋজুবেখার উপর যত
 ঋজুবেখা টানা যাইতে পারে তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

কারণ, যদি গ হইতে কথ'ব উপর গঘ \perp এবং
 গঙ অন্য ঋ: রে: টানা হয়,
 তাহা হইলে,



$\angle \text{গঘঙ} = \text{সম} \angle$ এবং $\therefore \angle \text{গঙঘ} (\text{উ: প্র: } \angle, \text{অস্থ:})$,
 $\therefore \text{গঙ} > \text{গঘ}$ ।

টিপ্পননী। নবম ও দশম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার কথা একত্র সংক্ষেপে এই—

ত্রিভুজের এক বাহু আর এক বাহুর বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, তদ্বিপরীত কোণ
 অপর বাহুর বিপরীত কোণের বড়, বা সমান, বা ছোট হইবে। এবং পরিবৃদ্ধক্রমে, ত্রিভুজের
 এক কোণ আর এক কোণের বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, তাহার বিপরীত বাহু অপর
 কোণের বিপরীত বাহুর বড়, বা সমান, বা ছোট হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

ত্রিভুজের যে কোন বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি
তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়।



মনে কর কখগ একটি \triangle , এবং কখ, কগ তাহার দুই বাহু।

তাহা হইলে $\text{কখ} + \text{কগ} > \text{খগ}$ ।

খক কে ঘ পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং মনে কর কঘ = কগ।

তাহা হইলে, $\therefore \text{কঘ} = \text{কগ}$, $\therefore \angle \text{কগঘ} = \angle \text{কঘগ}$ (উঃ প্রঃ ৯)।

কিন্তু $\angle \text{খগঘ} > \angle \text{কগঘ}$, $\therefore \angle \text{খগঘ} > \angle \text{কঘগ}$ অর্থাৎ $\angle \text{খঘগ}$,

এবং \therefore খঘ অর্থাৎ $\text{কখ} + \text{কঘ} > \text{খগ}$ (উঃ প্রঃ ১০)।

কিন্তু $\text{কঘ} = \text{কগ}$,

$\therefore \text{কখ} + \text{কগ} > \text{খগ}$ ।

অনুমান। যে কোন দুই বিন্দুর মধ্যে ঋজুরেখা যোজকই
অল্প প্রকার যোজক অপেক্ষা ন্যূনতম।

ইহা স্পষ্ট প্রতীয়মান। প্রমাণের অপেক্ষা থাকিলে তাহা এইরূপে দর্শিত
হইতে পারে।



মনে কর ক, খ দুই বিন্দু,

এবং ঋজু রেখা কখ, ও কুটিলরেখা কগঘখ বা কগ'ঘ'খ
বিন্দুদ্বয়ের যোজক।

তাহা হইলে $কগ + গঘ > কঘ$, এবং $কঘ + ঘথ > কথ$,

∴ $কগ + গঘ + ঘথ > কথ$ ।

সেইরূপে $কগ' + গ'ঘ' + ঘ'থ' > কথ$ ।

এবং বাহিবেব গোল বেথা স্পষ্টই দেখা যাইতেছে, কুটিল বেথা $কগ'ঘ'গ'$ অপেক্ষা বড় ।

৪। সৰ্ব্বাংশে সমান ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং সেই সেই বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয়ের তৃতীয় বাহুদ্বয় সমান হইবে, ত্রিভুজদ্বয় সমান হইবে, এবং তাহাদের অবশিষ্ট কোণগুলি, অর্থাৎ যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন তাহারা, পরস্পর সমান হইবে।



মনে কর কখগ, ঘঙচ দুটি ত্রিভুজ বাহাতে

কখ = ঘঙ, কগ = ঘচ, ও \angle কখগ = \angle ওঘচ।

তাহা হইলে খগ = ওচ, \triangle কখগ = \triangle ঘঙচ,

\angle কখগ = \angle ঘঙচ, \angle কগখ = \angle ঘচঙ।

কারণ, যদি ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ'র উপর এরূপে স্থাপিত হয় যে,

ক বিন্দু ঘ বিন্দুর উপর ও ওঃ রেঃ কখ ওঃ বেঃ ঘঙ'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে খ, ও'র উপর পড়িবে, \therefore কখ = ঘঙ,

এবং কগ, ঘচ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ কখগ = \angle ওঘচ,

ও গ, চ'র উপর পড়িবে, \therefore কগ = ঘচ।

এবং খ ও গ, উ ও চ'র উপর পড়ায়,

খঃ রেঃ খ'গঃ রেঃ উচ'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০),

সুতরাং খ'গ = উচ (স্বতঃসিদ্ধ ৯) ।

এবং Δ কখ'গ, Δ ঘউচ'র উপর পড়িবে,

সুতরাং Δ কখ'গ = Δ ঘউচ ।

আর \angle কখ'গ ও \angle কগ'খ, যথাক্রমে \angle ঘউচ ও \angle ঘচউ'র উপর পড়িবে,

সুতরাং \angle কখ'গ = \angle ঘউচ,

ও \angle কগ'খ = \angle ঘচউ ।

টিপ্পনী ১ । দুই ক্ষেত্র সর্বাংশে সমান হইলে তাহাদিগকে **সমজাত** ক্ষেত্র বলা যায় ।

২ । “যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন তাহার, পরস্পর সমান হইবে” এই কথার তাৎপৰ্য্য বিশেষ করিয়া বুঝা আবশ্যক ।

কথাস্থলিখ তাৎপৰ্য্য এই যে, \angle কখ'গ = \angle ঘউচ,

এবং \angle কগ'খ = \angle ঘচউ, কিন্তু \angle কখ'গ, \angle ঘচউ'র সমান হইবার কোন কাৰণ নাই ।

৩ । প্রমাণ করণ হলে বলা হইয়াছে

“ক'গ, ঘচ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ কখ'গ = \angle উঘচ” ।

এই কথার তাৎপৰ্য্য এই যে দুটি সমান কোণের মধ্যে একটি কোণের একবাহ যদি অপর কোণের একবাহের সহিত মিলিত হয়, তবে তাহাদের অপর বাহুদ্বয় অবশ্যই মিলিত হইবে, কেন না, প্রথম কোণটি দ্বিতীয়টি অপেক্ষা বড় না হইলে তাহার অপর বাহু বাহিরে পড়িবে না, এবং সেই কোণ ছোট না হইলে তাহার অপর বাহু ভিতরে পড়িবে না ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৩ ।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং তাহাদের তৃতীয় বাহুদ্বয়ও সমান হয়, তাহা হইলে একের প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপর ত্রিভুজের তৎসমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে, এবং ত্রিভুজদ্বয় সর্বোংশে সমান হইবে ।



মনে কর কখগ ও ঘঙচ দুই ত্রিভুজ বাহাতে

কখ=ঘঙ, কগ=ঘচ, এবং খগ=ঙচ ।

তাহা হইলে \angle কখগ = \angle ঙঘচ,

এবং Δ দ্বয় সর্বোংশে সমান ।

কারণ, Δ কখগ যদি Δ ঘঙচ'র উপর এরূপে স্থাপিত হয় যে,

খ, ঙ'র উপর ও খগ, ঙচ'র উপর পড়ে,

কিন্তু Δ কখগ, Δ ঘঙচ'র বিপরীত দিকে পড়ে,

তাহা হইলে গ, চ'র উপর পড়িবে, \therefore খগ=ঙচ ।

মনে কর কখ ও কগ, জঙ ও জচ এইরূপে পড়িল ।

ঘ, ও জ যোগ কর ।

তাহা হইলে \therefore ঘঙ=কখ=জঙ,

$\therefore \angle$ জঘজ = \angle ঙঘজ (উঃ প্রঃ ৯) ।

এবং \therefore $\text{ঘচ} = \text{কগ} = \text{জচ},$
 $\therefore \angle \text{চজঘ} = \angle \text{চঘজ}$ (উঃপ্রঃ ১) ।
 \therefore যোগ করিলে $\angle \text{উঘচ} = \angle \text{উজচ} = \angle \text{খকগ} ।$
 এবং $\triangle \text{কখগ}$ ও $\triangle \text{ঘউচ}$ সর্বোংশে সমান (উঃপ্রঃ ১২) ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৪ ।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই কোণ অপর
একটি ত্রিভুজের দুই কোণের সহিত যথাক্রমে
সমান হয়, এবং একের সমান সমান কোণের
সম্মিহিত বা সম্মুখীন একটি বাহু অপরের
তদ্রূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয়
সর্বসাংশে সমান হইবে ।



মনে কর কখগ, ঘঙচ দুটি ত্রিভুজ বাহাতে

\angle কখগ $= \angle$ ঘঙচ, ও \angle কগখ $= \angle$ ঘচঙ,

এবং খগ $=$ ঙচ, অথবা খক $=$ ঙঘ ।

তাহা হইলে Δ কখগ ও Δ ঘঙচ সর্বসাংশে সমান হইবে ।

প্রথমতঃ, মনে কর খগ $=$ ঙচ ।

Δ কখগ কে Δ ঘঙচ'র উপর একপে স্থাপিত কর বে,

খ, ঙ'র উপর ও খগ, ঙচ'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে গ, চ'র উপর পড়িবে, \therefore খগ $=$ ঙচ ।

খক, ঙঘ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ খ $= \angle$ ঙ,

এবং গক, চঘ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ গ $= \angle$ চ ।

আর ক, ঘ'র উপর পড়িবে,

\therefore খক ও গক, ঙঘ ও চঘ'র উপর পড়িরাছে ।

কেন না, ক অন্তত পড়িলে, খক ও ঙঘ, এবং গক ও চঘ

এই দুই ক্ষুদ্রের বা যুগলের অথবা তাহাদের কোন এক যুগলের,
কেবল আংশিক মিলন হইবে, কিন্তু তাহা হইতে পারে না, (স্বতঃসিদ্ধ ১০) ।

অতএব \triangle কখগ ও \triangle ঘঙচ সম্পূর্ণরূপে মিলিত হইবে,
এবং $\therefore \triangle$ কখগ $= \triangle$ ঘঙচ সর্বাংশে (স্বতঃসিদ্ধ ২)।

দ্বিতীয়তঃ, মনে কর কখ = ঘঙ ।

তাহা হইলে, $\therefore \angle$ খ + \angle গ + \angle ক $= ২$ সম $\angle = \angle$ ঙ + \angle চ + \angle ঘ,

এবং \angle খ + \angle গ $= \angle$ ঙ + \angle চ,

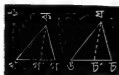
$\therefore \angle$ ক $= \angle$ ঘ ।

এবং \angle খ $= \angle$ ঙ ।

সুতরাং এবারও ত্রিভুজদ্বয়ের সমান বাহুর তাহাদের সমান সমান
কোণের সন্নিহিত । এবং প্রথম বাবে যে রূপে সপ্রমাণ হইয়াছে এবাবেও
ঠিক সেইরূপে সপ্রমাণ হইবে, \triangle কখগ $= \triangle$ ঘঙচ সর্বাংশে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৫ ।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত স্বাভাবিক সমান হয়, এবং তাহাদের এক ষোড়া সমান বাহুর সম্মুখীন কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের অপর সমান বাহুদ্বয়গণের সম্মুখীন কোণদ্বয় সমান অথবা পরস্পরের পরিপূরক হইবে ।



মনে কর কখগ (বা কখগ') ও ঘঙচ ছটি ত্রিভুজ বাহাতে

কখ = ঘঙ, কগ (বা কগ') = ঘচ, এবং \angle কখগ = \angle ঘঙচ ।

তাহা হইলে \angle কগখ (বা কগ'খ), \angle ঘচঙ'র সমান (বা পরিপূরক) হইবে ।

Δ কখগকে Δ ঘঙচ'র উপর এক্ষেপে স্থাপিত কর যে,

খ, ঙ'র উপর পড়ে, ও খগ, ঙচ'র উপর পড়ে ।

তাহা হইলে, খক, ঙঘ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ খ = \angle ঙ,

এবং ক, ঘ'র উপর পড়িবে, \therefore খক = ঙঘ,

এবং কগ, ঘচ'র উপর পড়িবে,

অথবা, যদি কগ, কগ' স্থানীয় হয়, তবে তাহা ঘচ' এর স্থানে পড়িবে ।

প্রথমোক্ত স্থলে \angle কগ'খ, \angle ঘচঙ'র উপর পড়িবে,

$\therefore \angle$ কগ'খ = \angle ঘচঙ ।

দ্বিতীয়োক্ত স্থলে \angle কগ'খ, \angle ঘচ'ঙ'র স্থানে পড়িবে,

$\therefore \angle$ কগ'খ = \angle ঘচ'ঙ হইবে,

অর্থাৎ \angle ঘচ'চ'র পরিপূরক হইবে ।

কিন্তু $\angle ঘচ'চ = \angle ঘচঙ$, $\therefore ঘচ = কগ' = ঘচ'$ ।

$\therefore \angle কগ'খ$, $\angle ঘচঙ$ 'র পরিপূরক হইবে।

টিপ্পনী। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২, ১৩, ১৪, ও ১৫, দুই ত্রিভুজের সমতা অর্থাৎ সর্বাংশে সমতা সম্বন্ধীয়। দুই ত্রিভুজের সেরূপ সমতা নিম্নোক্ত ব্যক্তিরেকমূল ভিন্ন সর্বত্রই থাকিবে, যদি এক ত্রিভুজের তিন কোণ ও ঐন বাহু এই ছয়টি অবয়বের মধ্যে কোন তিনটি অপর ত্রিভুজের তদনুরূপ তিনটি অবয়বের সহিত যথাক্রমে সমান হয়।

যে সকল ভিন্ন ভিন্ন স্থল ঘটতে পারে তাহা নিয়ে বিবৃত করা বাইস্তেছে।

১ (ক)। সমান অবয়বগুলি যদি দুই বাহু ও তদন্তরের সম্মিহিত কোণ হয় তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১২ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রদর্শিত।

১ (খ)। সমান অবয়ব গুলি যদি দুই বাহু ও তদন্তরে এক বাহুর সম্মিহিত ও অপর সন্মুখীন কোণ হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বাংশে সমান, অথবা তাহাদেয় অপর সমান বাহু দুগুণের সম্মুখীন কোণদ্বয় পবম্পরের পরিপূরক, হইবে। এই কথা ১৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রদর্শিত।

২। সমান অবয়বগুলি যদি দুই কোণ ও এক অনুরূপস্থিত বাহু হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১৪ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রদর্শিত।

৩। যদি সমান অবয়বগুলি তিন বাহু হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১৩ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রদর্শিত।

৪। যদি সমান অবয়বগুলি তিন কোণ হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সমান না হইতে পারে। তাহা পাশের চিত্রে স্পষ্ট প্রকাশ।

খ, গ, ও খ, গ, খ, গ'ব সমান্তর, হস্তরাং

$\triangle কখগ$, $\triangle কখ'গ$, ও $\triangle কখ'গ'$ তিনটিব মধ্যে প্রত্যেকেরই কোণত্রয় অপর দুইটির কোণত্রয়ের সহিত যথাক্রমে সমান (উঃপ্রঃ ৬), কিন্তু ত্রিভুজগুলি সমান নহে।



৫। অসঙ্গত ত্রিভুজদ্বয়ের একটি উদাহরণ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৬।

১। যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, কিন্তু সেই সেই সমান বাহু শৃঙ্গের অন্তর্গত কোণদ্বয় সমান না হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের সেই অন্তর্গত কোণ বৃহত্তর তাহার তৃতীয় বাহু অপর ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২। পরিবর্ত্ত ক্রমে, যদি এক ত্রিভুজের দুই বাহু আর এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত সমান হয়, কিন্তু ত্রিভুজদ্বয়ের তৃতীয় বাহু শৃঙ্গল সমান না হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু বৃহত্তর, তাহার প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপর ত্রিভুজের তদনুরূপস্থিত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



১। মনে কর কখগ ও ঘঙচ দুটি \triangle বাহাতে কখ=ঘঙ,
কগ=ঘচ,

কিন্তু \angle খকগ $>$ \angle ঙঘচ।

তাহা হইলে খগ $>$ ঙচ।

মনে কর ঘঙ, ঘচ অপেক্ষা বড় নহে,

এবং মনে কর \angle ঙঘজ = \angle খকগ, যজ=ঘচ=কগ।

উজ্জ যোগ কব, ও মনে কব উজ্জ, ঘচকে হ'তে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে \therefore ঘঙ, ঘচ বা ঘজ্জ অপেক্ষা বড় নহে,

\therefore \angle ঘজ্জঙ, \angle ঘঙজ্জ অপেক্ষা বড় নহে (উঃ প্রঃ ১০) ।

কিন্তু \angle ঘহজ্জ $>$ \angle ঘঙজ্জ (উঃ প্রঃ ৮, অমুঃ ২) ।

\therefore \angle ঘহজ্জ $>$ \angle ঘজ্জঙ অর্থাৎ \angle ঘজ্জহ, এবং

\therefore ঘজ্জ বা ঘচ $>$ ঘহ,

অর্থাৎ হ, চ'র উর্ধ্বে পড়িতেছে ।

এখন \therefore ঘজ্জ = ঘচ, \therefore \angle ঘচজ্জ = \angle ঘজ্জচ ।

আব \angle ওচজ্জ $>$ \angle ঘচজ্জ বা \angle ঘজ্জচ, এবং \therefore $>$ \angle ওজ্জচ,

\therefore ওজ্জ $>$ ওচ ।

আবাব, \therefore Δ কখগ ও Δ ঘঙজ্জতে, কখ = ঘঙ, কগ = ঘজ্জ,

এবং \angle খকগ = \angle ওঘজ্জ,

\therefore খগ = ওজ্জ (উঃ প্রঃ ১২) ।

এবং \therefore খগ $>$ ওচ ।

২। যদি Δ কখগ, ও Δ ঘঙচ তে

কখ = ঘঙ, কগ = ঘচ, কিন্তু খগ $>$ ওচ,

তাহা হইলে \angle খকগ $>$ \angle ওঘচ ।

কারণ, তাহা না হইলে, \angle খকগ = বা $<$ \angle ওঘচ ।

কিন্তু \angle খকগ = \angle ওঘচ নহে,

\therefore তাহা হইলে খগ = ওচ হইত, বাহা কল্পনা বিরুদ্ধ ।

এবং \angle খকগ $<$ \angle ওঘচ নহে,

\therefore তাহা হইলে খগ $<$ ওচ হইত, বাহা কল্পনা বিরুদ্ধ ।

\therefore \angle খকগ $>$ \angle ওঘচ ।

টিপ্পনী । উপশাস্ত্র প্রতিজ্ঞা ১২ ও ১৩ একত্র এই ভাবে প্রকাশ করা যাইতে

পারে যথা,—

এক ত্রিভুজের দুই বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সমান হইলে, প্রথম ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বিতীয় ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর বড়, সমান, অথবা ছোট হইবে, যদি প্রথম ত্রিভুজের প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, দ্বিতীয় ত্রিভুজের তৎসমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের বড়, সমান, অথবা ছোট হয় ।

৬। সামান্তরিক ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৭।

সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণ সমান, এবং প্রত্যেক কর্ণ তাহাকে সমান দ্বিখণ্ড করে।



মনে কর কখগঘ একটি \square , এবং কর্ণ ও খঘ তাহার কর্ণ।
তাহা হইলে, কখ = গঘ, কঘ = গখ, \angle কখঘ = \angle ঘগখ,
 \angle কখগ = \angle গঘক,

$$\Delta \text{কখঘ} = \Delta \text{গঘখ}, \Delta \text{কখগ} = \Delta \text{গঘক}।$$

কাৰণ, \therefore কখ \parallel গঘ, $\therefore \angle$ কখঘ = \angle গঘখ (উঃ প্রঃ ৫),
এবং \therefore কঘ \parallel গখ, $\therefore \angle$ কঘখ = \angle গখঘ (উঃ প্রঃ ৫)।

$\therefore \Delta \text{কখঘ}$ ও $\Delta \text{গঘখ}$ তে

\angle কখঘ = \angle গঘখ, \angle কঘখ = \angle গখঘ, এবং খঘ উভয়ে আছে,
সুতরাং কখ = গঘ, কঘ = গখ, \angle কখঘ = \angle ঘগখ,
এবং $\Delta \text{কখঘ} = \Delta \text{গঘখ}$ (উঃ প্রঃ ১৪)।

ঐরূপে দেখা যাইবে $\Delta \text{কখগ} = \Delta \text{গঘক}$ ।

আবার, $\therefore \angle$ কখঘ = \angle গঘখ, ও \angle গখঘ = \angle কঘখ,
 \therefore বোঝা করিলে \angle কখগ = \angle গঘক।

অনুমান ১। দুই সমান ও সমান্তর ঋজু রেখার সমান সমান
দিকের শেষ বিন্দুদের যোজক ঋজু রেখাঘর সমান ও সমান্তর।

উপরের চিত্রে মনে কর কখ এবং গঘ সমান এবং সমান্তর।

তাহা হইলে, কঘ এবং গখও সমান এবং সমান্তর।

কর্গ যোগ কর। তাহা হইলে Δ কথর্গ ও Δ গর্ঘক তে,
 কথ = ঘর্গ, কর্গ উভয়েই আছে, ও \angle থকর্গ = \angle ঘর্গক,
 \therefore কঘ = গথ, \angle কর্গথ = \angle গর্কঘ (উঃ প্রঃ ১২)।
 এবং \therefore কঘ \parallel গথ (উঃ প্রঃ ৫)।

অনুমান ২। সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাব
 সকল কোণই সমকোণ হইবে।

কাবল (উপবেব চিত্রে)

\angle থকঘ + \angle কথর্গ = ২ সম \angle (উঃ প্রঃ ৬),
 \therefore যদি \angle থকঘ = ১ সমকোণ,
 তাহা হইলে \angle কথর্গ = ১ সমকোণ।

এবং সামান্তরিকের অপব কোণদ্বয়

এই দুই কোণের সমান, সুতরাং তাহাবও সমকোণ।

টিপ্পনী। কথ ও থর্গ যেইক আয়তকে সঙ্ক্ষেপে কথ . থর্গ আরত বলে।

অনুমান ৩। যদি তিন বা ততোধিক সমান্তর ঋজুরেখা তাহাদের কোন একটি ছেদক ঋজুবেখাকে সমান সমান খণ্ডে ভাগ করে, তবে তাহারা তাহাদের অপর সকল ছেদককেই সমান সমান খণ্ডে ভাগ করিবে।



মনে কর কখ, গঘ, ওচ তিনটি সমান্তর ঋঃ বেঃ

এবং জহ'র খণ্ড বাঞ = এণ্ট,

তাহা হইলে লম'র খণ্ড নও = ওব।

মনে কর খওভ ॥ জহ।

তাহা হইলে বাঞওখ, এণ্টভও ইহার \square ,

এবং \therefore ওখ = বাঞ = এণ্ট = ওভ।

এবং \angle ওখন = \angle ওভব, \angle ওনখ = \angle ওবভ,

$\therefore \triangle$ ওনখ ও \triangle ওবভ হইতে, ওন = ওব (উঃ প্রঃ ১৪)।

অনুমান ৪। সমান্তর ঋজুবেখাদ্বয় সর্বত্র সমদূর্বহিত।

কারণ, তাহাদের একটির কোন দুই বিন্দু হইতে অপরটির উপর দুটি লম্ব টানিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে, এবং লম্বদ্বয় তাহার বিপরীত বাহু হইবে। সুতরাং লম্বদ্বয় সমান হইবে।

৭। সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ।

উপপাদ্যপ্রতিজ্ঞা—১৮ ।

এক ভূমির উপর স্থিত সম সামান্তর অন্তর্গত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান ।



মনে কখ কখগঘ, গুখগচ দুটি □

একই ভূমি খ'গ'ব উপর স্থিত, এবং সম সামান্তর খ'গ' ও কচ'র অন্তর্গত ।

তাহা হইলে □ কখগঘ = □ গুখগচ ।

কারণ, ∵ কখগঘ ও গুখগচ উভয়ই □,

∴ কখ = ঘগ, খগ = গচ (উঃ প্রঃ ১৭) ।

এবং, ∵ কখ ∥ ঘগ, খগ ∥ গচ,

∠ কখগ = ∠ ঘগচ (উঃ প্রঃ ৭, অমুঃ) ।

∴ Δ কখগ = Δ ঘগচ (উঃ প্রঃ ১২) ।

এখন ক্ষেত্র কখগচ হইতে একবার Δ কখগ, আবার একবার Δ ঘগচ বাদ দিলে দুইবাবের বাকী যথাক্রমে

□ গুখগচ, ও □ কখগঘ,

এবং এই বাকী দুইটি অবশিষ্ট সমান (স্বতঃসিদ্ধ ৩),

∴ □ কখগঘ = □ গুখগচ ।

টিপ্পনী ১। উপরের দুটি সামান্তরিক কখগঘ ও গুখগচ ক্ষেত্রফলে সমান, কিন্তু সর্বোংশে সমান নহে । দুই ক্ষেত্রের সর্বোংশে সমতা না থাকিলেও কেবল ক্ষেত্রফলের সমতা থাকিতে পারে, এই প্রতিজ্ঞা তাহার প্রথম উদাহরণ ।

উপরের প্রমাণ দৃষ্টে দেখা যাইতেছে, সামান্তরিকের অন্ত্যকটিকেট কাটিয়া অপবর্তিত সহিত সমান করা যাইতে পারে। অর্থাৎ \square কখগঘ'র বাম দিক হইতে \triangle কখঙ কাটিয়া দক্ষিণে যোগ করিলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা \square গুখগচ'র সহিত মিলিয়া যাইবে। এবং \square গুখগচ'র দক্ষিণ দিক হইতে \triangle চগঘ কাটিয়া বামে যোগ করিলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা \square কখগঘ'র সহিত মিলিয়া যাইবে।

টপ্পনী ২। দুটি সামান্তরিক যদি এক ভূমির উপর থাকে, এবং তাহাদের উচ্চতা, অর্থাৎ ভূমির বিপরীত বাহুর কোন বিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব সমান হয়, তবে তাহারা সমান হইবে।

কারণ, উভয়কেই ভূমির একদিকে স্থাপিত করিলে তাহারা সম সামান্তরের অন্তর্গত হইবে যেহেতুক তাহাদের ভূমির বিপরীত বাহুর কোন দুই বিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বদ্বয় টানিলে সমান হইবে, ও সমান্তর হইবে, হ্রতবাং সেই বিন্দুদ্বয়ের যোগক অবস্থাই ভূমির সহিত সমান্তর (উঃ প্রঃ ১৭, অমুঃ ১)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৯ ।

সমান ভূমির উপর স্থিত সম সমান্তর
অন্তর্গত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্র ফল সমান ।



মনে কব কখগঘ ও ওচজহ টাট □

সমান ভূমি খগ ও চজ'র উপর স্থিত, এবং

সম সমান্তর কহ ও খজ'র অন্তর্গত ।

তাহা হইলে □ কখগঘ = □ ওচজহ ।

খঙ, গহ বোগ কর ।

তাহা হইলে, ∴ খগ = চজ = ওহ (উঃ প্রঃ ১৭),

এবং খগ ॥ ওহ,

∴ খঙ ॥ গহ (উঃ প্রঃ ১৭, অঙ্কঃ ১),

এবং ∴ ওখগহ একটি □ ।

এবং কখগঘ = ওখগহ (উঃ প্রঃ ১৮)

= ওচজহ (উঃ প্রঃ ১৮) ।

টিপ্পনো । সমান ভূমির উপর স্থিত ও সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সামান্তরিকদ্বয়ের কেন্দ্রকল
সমান ।

কারণ, পূর্ব প্রতিজ্ঞার ২ টিপ্পনীতে প্রদর্শিত প্রক্রিয়াধারা তাহাবিন্যাসকে সম সমান্তরয়ের
অন্তর্গত করা যাইতে পারে ।

উপপাদ্যপ্রতিজ্ঞা-২০ ।

১। একই ভূমির উপর স্থিত সম সমান্তর অন্তর্গত ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান ।

২। পরিস্ফুট ক্রমে, একই ভূমির উপর স্থিত সমান ত্রিভুজদ্বয় সম সমান্তর অন্তর্গত ।



১। মনে কর কখগ ও ঘখগ দুটি Δ

একই ভূমি খগ'র উপর স্থিত সমসমান্তর কঘ, খগ অন্তর্গত ।

তাহা হইলে Δ কখগ = Δ ঘখগ ।

মনে কর খঙ ॥ গক, গচ ॥ খঘ,

এবং \square গুখগক, \square চগখঘ সম্পূর্ণরূপে অঙ্কিত কর ।

তাহা হইলে \square গুখগক = \square চগখঘ (উঃ প্রঃ ১৮),

এবং Δ কখগ = $\frac{1}{2}$ \square গুখগক,

Δ ঘখগ = $\frac{1}{2}$ \square চগখঘ (উঃ প্রঃ ১৭) ।

$\therefore \Delta$ কখগ = Δ ঘখগ (স্বতঃসিদ্ধ ৭) ।

২। মনে কর Δ কখগ = Δ ঘখগ ।

তাহা হইলে কঘ ॥ খগ ।

কারণ, যদি না হয়,

মনে কর ঘজ ॥ খগ ।

তাহা হইলে Δ জখগ = Δ ঘখগ = Δ কখগ,

যাহা কোন মতে হইতে পারে না (স্বতঃসিদ্ধ ৮),

যদি জ এবং ক মিলিত না হয় ।

\therefore

কঘ ॥ খগ ।

অনুমান ১। উপরের প্রতিজ্ঞা ও ১৭ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, যদি একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর স্থিত ও সম সমান্তর অন্তর্গত হয়, তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক ।

অনুমান ২। উপরের প্রতিজ্ঞা এবং ১২ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, সমানভূমির উপর স্থিত ও সম সমান্তর অন্তর্গত ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান ।

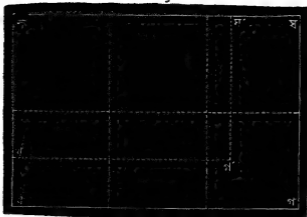
টিপ্পনী ১। উপরের প্রতিজ্ঞার 'সম সমান্তর অন্তর্গত' এই কথাগুলির পরিবর্তে "সমান উচ্চতাবিশিষ্ট" এই কথা বলিলেও প্রতিজ্ঞা সত্য হইবে। তাহা ১৮ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় টিপ্পনী হইতে স্পষ্ট প্রতীয়মান হইতেছে ।

টিপ্পনী ২। অষ্টাদশ হইতে বিংশ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে ।

কোন একাধি আয়তনকে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে, সেই একাধির একটি নির্দিষ্ট আয়তনকে পরিমাণেব একক বলিয়া লইতে হইবে, এবং পরিমেয় আয়তন সেই নির্দিষ্ট আয়তনের কতগুণ অর্থাৎ তাহাতে সেই নির্দিষ্ট আয়তন কত সংখ্যক বাব আছে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। তাহা হইলে সেই সংখ্যাই পরিমেয় আয়তনকে পরিমাণ জ্ঞাপক হইবে। সেই সংখ্যা জানিলেই আমরা ঐ পরিমেয় আয়তন কত বড়, অর্থাৎ তাহা সেই নির্দিষ্ট একক আয়তনের কতগুণ। কিন্তু মনে বান্ধিতে হইবে সেই সংখ্যা দ্বারা পরিমেয় আয়তনের কেবল পরিমাণ জানা যায়, তাহার প্রকান্ন জানা যায় না।

যথা, মনে কব একটি দৈর্ঘ্যের পরিমাণ জানা উদ্দেশ্য, এবং মনে কব এক হাত দৈর্ঘ্য আমাদের নির্দিষ্ট একক, ও পরিমেয় দৈর্ঘ্য ৮০ তাহা। তাহা হইলে ৮০ এই সংখ্যা সেই পরিমেয় দৈর্ঘ্যের পরিমাণ জানাইয়া দিবে। কিন্তু সে দৈর্ঘ্য কি প্রকান্ন, অর্থাৎ তাহা শুধু কি কুটিল, তাহা ঐ সংখ্যা দ্বারা জানা যাইবে না।

ক্ষেত্রফলের পরিমাণ সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে, একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রকে একক বলিয়া লইতে হইবে, এবং কোন পরিমেয় ক্ষেত্র সেই নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের কতগুণ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা ব্যক্ত হয় সেই সংখ্যাই সেই পরিমেয় ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রকাশ করিবে। দৈর্ঘ্য পরিমাণ নির্দিষ্ট যে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য একক বলিয়া গৃহীত হয়, তদুপরি অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ক্ষেত্রফল পরিমাপার্থে নির্দিষ্ট একক বলিয়া গ্রহণ করিলে একটি সহজ ও সুবিধাজনক একক গ্রহণ করা হইবে। এহ একটি যে সহজে ধারণ্য তাহা অন্যায়সেই দেখা যাইতেছে। ইহা যে সুবিধাজনক তাহা এখনই দৃশ্য হইবে।



মনে কর **কখগঘ** আয়তের ক্ষেত্রফলের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইবে, এবং মনে কর **কখ** = ২ ইক, **খগ** = ৩ ইক, এবং ১ ইক, রৈখিক একক অর্থাৎ সৈধ্য মাপের একক বলিয়া গৃহীত হইল।

কখ ও খগ কে ২ ও ৩ ভাগে ভাগ করিয়া, ও ভাগের বিন্দু দিয়া সমান্তর গুলু রেখা টানিয়া, দেখা যাইতেছে, আয়তটি দুই সারি ছোট ছোট বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইল, এবং প্রত্যেক সারিতে তিনটি করিয়া ছোট ছোট বর্গক্ষেত্র রহিল। এই ছোট ছোট বর্গ ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি এক ইকের উপর স্থিত। এবং তাহাদের সংখ্যা $২ \times ৩ = ৬$ ।

যদি প্রচলিত ভাষানুসারে **খগ** কে আয়তের **ভূমি** ও **কখ** কে আয়তের **উচ্চতা** বলা যায়, তাহা হইলে দেখা যাইতেছে,

আয়তের অন্তর্গত বর্গ। এককের অর্থাৎ রৈখিক এককের উপস্থিত বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা
 $= ৬ = ৩ \times ২$

= আয়তের ভূমির অন্তর্গত রৈখিক এককের সংখ্যা

\times ... উচ্চতার ...

এই কথা সকলে এই ভাবে বলা যায় যে—

আয়তের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমি ও উচ্চতার গুণফলের সমান।

যখন ১৮ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা অনুসারে, একই ভূমির উপর হিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট
সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান, তখন,

ইহাও বলা যায় যে,

**সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমির ও
উচ্চতার গুণফলের সমান ।**

বিভূজের ক্ষেত্রফল তত্ব লা ভূমির উপর হিত ও তত্ব লা উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিকের
ক্ষেত্রফলের অর্ধেক । অতএব সঙ্ক্ষেপে বলা বাইতে পারে যে—

**বিভূজের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমির ও
উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক ।**

গতি কথ' ও খগ'র পরিমাণে তদ্যাংশ থাকে তাহা হইলেও ই সকল কথা সত্য হইবে ।

মনে কর কথ' = $১\frac{১}{২}$ ইক,

খগ' = $২\frac{১}{২}$.. ।

১। তা হইলে আরত কথ'গ'ঘ' ক্ষেত্রে

$১\frac{১}{২} \times ১\frac{১}{২} = ৩\frac{১}{৪}$ বর্গ ইক থাকিবে,

অর্থাৎ $২ \times ১ = ২$ বর্গ ইক (১ম সারো),

$১ \times ১ = ১ + ১ = ২$... (২য় সারো)

$\frac{১}{২} \times ১ = \frac{১}{২}$.. (১ম সারো),

$\frac{১}{২} \times \frac{১}{২} = \frac{১}{৪}$.. (২য় সারো) ।

অতএব সাধারণতঃ

যদি কথ' = অ রৈখিক একক

খগ' = ই ,

তাহা হইলে আরত কথ'গ'ঘ' = অই বর্গ একক,

অথবা সঙ্ক্ষেপে

যদি কথ' = অ,

খগ' = ই,

তাহা হইলে আরত কথ'গ'ঘ' = অই ।

এইটি অতি সুবিধাজনক সাঙ্কেতিক বাক্য,

এবং তাহা রৈখিক এককের উপর হিত বর্গক্ষেত্রে বর্গ একক বলিয়া মানিয়া লওয়ার কল ।

যদি $\alpha = \text{ই}$, তাহা হইলে

কথগঘ একটি বর্গক্ষেত্র হইবে এবং

তাহার ক্ষেত্রফল $= \alpha^2$ ।

টিপ্পনী ৩। যদি মনে করা যায় যে উপরের চিত্রে **কঘ** যে ৩ খণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে তাহা যথাক্রমে

$= \alpha$, ই , উ , এবং **কখ'** $= \alpha$,

তাহা হইলে **কঘ** $= \alpha + \text{ই} + \text{উ}$ ।

এবং আয়ত **কখ'গ'ঘ** $= (\alpha + \text{ই} + \text{উ}) \alpha$ ।

কিন্তু আয়ত **কথ'গ'ঘ** এর অন্তর্গত আয়ত তিনটি

যথাক্রমে $= \alpha\alpha$, $\text{ই}\alpha$, $\text{উ}\alpha$ ।

$\therefore (\alpha + \text{ই} + \text{উ}) \alpha = \alpha\alpha + \text{ই}\alpha + \text{উ}\alpha$ ।

টিপ্পনী ৪। আয়তের নাম করণ সঙ্ক্ষেপে তাহার বিপরীত কোণদ্বয় দ্বিত্ব দ্বারা বহুত্ব দ্বারা হইয়া থাকে । যথা,

আয়ত **কথগঘ** কে আয়ত **কগ** বা আয়ত **খঘ** বলা যায় ।

৮। ত্রিভুজের এক বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র ও অপর বাহুর দ্বয়ের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র-
দ্বয়ের পরস্পর সমান্তর ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২১।

সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ সম্মুখীন
বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহুর দ্বয়ের
উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টির সমান ।



মনে কব কথগ সমকোণী Δ , ও থকগ তাহার সম \angle ।

ভাঙা হইলে থগ'ব উপব বর্গ ক্ষেত্র

= কথ'ব উপব বর্গক্ষেত্র + কগ'র উপব বর্গক্ষেত্র ।

মনে কব থঘঙগ, কথচজ, ও কগহবা, যথাক্রমে

থগ, কথ, ও কগ'ব উপব বর্গক্ষেত্র ।

কঘ ও গচ যোগ কব, এবং মনে কর কঞ ॥ থঘ বা গঙ ।

তাহা হইলে, $\therefore \angle$ থকগ = সম \angle , ও \angle থকজ = সম \angle (উঃ প্রঃ ১৭, অঙ্কঃ ২),

\therefore গক ও কজ একই । (উঃ প্রঃ ২) এবং ॥ থচ ।

এবং $\therefore \angle$ গথঘ = \angle কথচ (কাবণ উভয়ই সম \angle)

$\therefore \angle$ কথগ উভয়ের সহিত যোগ করিলে, \angle কথঘ = \angle চথগ ।

এবং কথ = চথ, থঘ = থগ ।

$\therefore \Delta$ কথঘ = Δ চথগ (উঃ প্রঃ ১২) ।

আবার, \square থঞ = $2 \times \Delta$ কথঘ,

এবং \square কথচজ = $2 \times \Delta$ চথগ (উঃ প্রঃ ২০, অঙ্কঃ ১),

$\therefore \square$ থঞ = \square কথচজ ।

এরূপে দেখা যাইবে $\square গঞ = \square কগহব$ ।

$\therefore \square খঞ + \square গঞ$ অর্থাৎ $\square খঙ = \square কখচজ + \square কগহব$,
অর্থাৎ $খগ$ 'র উপব বর্গক্ষেত্র $=$ $কখ$ 'র উপব বর্গক্ষেত্র
 $+ কগ$ 'র উপব বর্গক্ষেত্র ।

টিপ্পনী ১। এই অতিজ্ঞা গ্রাসের সমিত্যের প্রমাণার্থে নাম অতিজ্ঞা ।
কিন্তু এই তত্ত্বটি হিন্দু বা বহুপুত্র হইতে জ্ঞানিতেন, এবং পুত্রের সূত্রটী তাহার প্রমাণ ।
এসিয়াটিক সোসাইটির পত্রিকা ৪৪ সংখ্যা (১৮৭৫) ১১৭ পৃষ্ঠায় প্রকাশিত ডা পিএম সাহসনব
এবং এ সম্বন্ধে লিখিয়া ।

টিপ্পনী ২। সমকোণের সমুপীম বাহুকে $কর্ণ$ বলে ।

এই অতিজ্ঞার তত্ত্ব সংক্ষেপে এইরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে

$$খগ^2 = কখ^2 + কগ^2,$$

$$\text{অথবা যদি } খগ = অ, কগ = উ, কখ = উ,$$

$$\text{তাহা হইলে } অ^2 = উ^2 + উ^2 ।$$

$$\text{যদি } উ = উ$$

$$\text{তাহা হইলে, } অ^2 = ২ উ^2,$$

$$\text{এবং } অ = \sqrt{২} উ ।$$

$$\text{অতএব বর্গক্ষেত্রের কর্ণ} = \sqrt{২} \times \text{বাহু} ।$$

কিন্তু $\sqrt{২}$ এর ঠিক মূল্য সঙ্গীম সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না । তবে বর্গমূল অকর্ণের
নিরমাম্বুসারে ২ এর বর্গমূলের দশমিকের দ্বারের সংখ্যা বহু বৃদ্ধি করা যাইবে ততই নির্ণীত
মূল্য প্রকৃত মূল্যের সমীপস্থ হইতে থাকিবে । (পাটীগণিতের ১৭৫ ধারা লিখিয়া) ।

$$\text{গণনা দ্বারা জানা যায় } \sqrt{২} = ১.৪১৪২১৩ ।$$

যদি বর্গক্ষেত্রের বাহু ১ ইঞ্চি হয় এবং $\sqrt{২}$ এর মূল্য দশমিকের ৪ ঘর পর্যন্ত লওয়া যায়
তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ১.৪১৪২ ইঞ্চি হইবে । এবং $\frac{১৪১৪২}{১০০০০}$ ইঞ্চি যদি বৈজ্ঞানিক
একক হয়, তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের বাহু ১০০০০ দ্বারা ও তাহার কর্ণ ১৪১৪২ দ্বারা
প্রকাশ করা যাইবে । আর এই শ্রেণীকৃত সংখ্যা ও কর্ণের প্রকৃত মূল্যের অন্তর $\frac{১}{১০০০০}$
ইঞ্চি অপেক্ষা অল্প হইবে, এবং তাহা দৃষ্টব্য নহে ।

অতএব কার্যতঃ সকল আরম্ভই সংখ্যা দ্বারা পরিমের বলা যাইতে পারে, এবং তাহাদের প্রকৃত মূল্যের যতদূর সঙ্গ্রহিত সংখ্যা লওয়া আবশ্যক হইবে, সূত্র হইতে সূত্রতর একক গইবা (অর্থাৎ সেই মূল্যের দশমিকের দর বৃদ্ধি করিয়া) ততদূরই যোগা যাইতে পারে ।

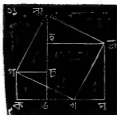
টিপ্পনী ৩ । সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুটি বাহু জানা থাকিলে তৃতীয়টি জানা যায়

$$\text{কারণ} \quad \text{অ}^2 = \text{ই}^2 + \text{উ}^2 \quad |$$

$$\therefore \quad \text{ই}^2 = \text{অ}^2 - \text{উ}^2,$$

$$\text{উ}^2 = \text{অ}^2 - \text{ই}^2 \quad |$$

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২১এব আদ্য এক প্রকার প্রমাণ নিয়ে প্রদর্শিত হইতেছে ।



মনে কব কথগ সমকোণী \triangle , এবং \angle ক তাগব সম \angle ।

মনে কব $\text{খঘ} = \text{কগ}$, $\text{কঙ} = \text{কগ}$,

তাহা হইলে $\text{ঙঘ} = \text{কথ}$ ।

মনে কব কগচঙ ও ঙঘজহ , কগ ও ঙঘ 'র উপব বর্গক্ষেত্র,

তাহা হইলে $\text{ঙঘজহ} = \text{কথ}$ 'র উপব বর্গক্ষেত্র ।

চহকে বা পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কব, এবং মনে কব $\text{হবা} = \text{কগ}$,

ও গবা জবা , জথ যোগ কব ।

তাগ হইলে খঘজ , বহজ , গচবা এই ত্রিভুজত্রয় সহজেই দেখা যায়,

\triangle কথগ 'র সতিত সর্বত্রাংশে সমান (উঃ প্রঃ ১২) ।

\therefore $\text{গথ} = \text{খজ} = \text{জবা} = \text{বাগ}$ ।

এবং $\angle \text{বজহ} = \angle \text{খজঘ}$,

$\therefore \angle \text{বজথ} = \angle \text{ঘজহ} = \text{সম } \angle$ ।

আবার $\angle \text{গবজ} = \angle \text{গবাচ} + \angle \text{হবজ}$

$= \angle \text{গবাচ} + \angle \text{চগবা}$

$= \text{সম } \angle \quad | \quad (\text{উঃ প্রঃ ৮})$ ।

অতএব খগবজ , খগ 'র উপব বর্গক্ষেত্র ।

এবং খগঝজ্ঞ বা খগ'র উপব বর্গক্ষেত্র

$$\begin{aligned}
 &= \text{গখজহচ ক্ষেত্র} + \Delta \text{ঝহজ্ঞ} + \Delta \text{গচঝ} \\
 &= \text{গখজহচ ক্ষেত্র} + \Delta \text{খঘজ্ঞ} + \Delta \text{খকগ} \\
 &= \text{বর্গক্ষেত্র ওঘজহ} + \text{বর্গক্ষেত্র কঙচগ} \\
 &= \text{কখ'র উপবে বর্গক্ষেত্র} + \text{কগ'র উপবে বর্গক্ষেত্র}।
 \end{aligned}$$

টিপ্পনী ৪। এই প্রমাণে দেখা যাইতেছে, কার্ণব উপবিস্তৃত বর্গক্ষেত্রে গখজহচ, ঝহজ্ঞ, ও ঝচগ এই তিন খণ্ড করিয়া শেষের দুই খণ্ড তাহার দুই পক্ষ বাহিলে অর্থাৎ খগ ও খজ'র সংলগ্ন করিলে, কগ ও কখ'র উপবিস্তৃত বর্গক্ষেত্র এই সংলগ্ন থাকিল যে স্থান পূরণ করে, ঐ খণ্ডত্রয় সেই স্থান পূরণ করে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২২।

যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার অপর বাহুদ্বয়ের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তাহা হইলে সেই ত্রিভুজের প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ।



মনে কর \triangle কথগতে

খগ'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র = কথ'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র
+ কগ'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

তাহা হইলে \angle খকগ = সম \angle ।

মনে কর কঘ \perp কগ এবং = কথ। গঘ যোগ কর।

তাহা হইলে,

ঘগ'র উপর ব: ক্ষে: = কগ'র উপর ব: ক্ষে:
+ কঘ'র . (উ: প্র: ২১)
= কগ'র .
+ কথ'র . (\because কঘ = কথ)
= খগ'র . (কল্পনানুসাবে)।

\therefore ঘগ = খগ।

অতএব \triangle কখগ ও \triangle কঘগ তে,

কখ = কঘ, কগ উভয়েই আছে,

এবং

খগ = ঘগ,

\therefore

\angle খকগ = \angle ঘকগ = সম \angle ।

উপসন্নী। এই প্রতিজ্ঞা ১১ প্রতিজ্ঞার পরিণতি।

উপপাদা প্রতিজ্ঞা-২৩।

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র তাহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান, অথবা তদপেক্ষা বৃহত্তর, বা ক্ষুদ্রতর হইবে, যদি প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ, বা স্থূল কোণ, বা সূক্ষ্ম কোণ হয়। এবং শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের মধ্যে যে কোন বাহু, ও উক্ত কোণের বিন্দু এবং সেই বাহুর উপর তদ্বিপরীত কোণ হইতে পতিত লম্বের সম্পাত বিন্দুর মধ্যে স্থিত সেই বাহুর অংশ, এই ঋজুরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ, সেই বৃহত্তা বা ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণের সমান হইবে।



১ম চিত্র

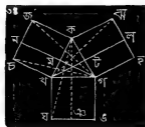
মনে কর কথ'র একটি Δ ।

তাহা হইলে থ'গ'র উপর বঃ ক্ষেঃ = বা > বা <

কথ'র উপর বঃ ক্ষেঃ + ক'গ'র উপর বঃ ক্ষেঃ

বদি

\angle থ'ক'গ' = বা > বা < সম \angle ।



২য় চিত্র

এবং শেখোক্ত হই স্থলে, যদি \angle গক, গম \perp খক, তাহা হইলে
 \angle খ'গ'র উপর বঃ কোঃ = \angle ক'খ'র উপর বঃ কোঃ + \angle ক'গ'র উপর বঃ কোঃ

• $\pm 2 \times \angle$ ক'খ' ও \angle ক'ম' লইয়া আরত
 বা $2 \times \angle$ ক'গ' ও \angle ক'ট' লইয়া আরত ।

এই প্রতিজ্ঞার প্রথম কথাটি ইহার পূর্ববর্তী প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা
 হইরাছে ।

দ্বিতীয় ও তৃতীয় কথা সপ্রমাণ করণার্থে

১ম ও ২য় চিত্র জ্ঞেয় ।

উপরের ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞাব

প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে দেখা যায়,

\triangle ক'খ'ঘ = \triangle চ'খ'গ,

\therefore আরত \angle খ'গ = আরত \angle খ'ন = \angle ক'খ'ব উপর বঃ কোঃ \pm আরত মজ্জ ।

এবং সেই কারণে

আরত গ'গ = আরত গ'ল = \angle ক'গ'র উপর বঃ কোঃ \pm আরত ট'ব ।

\therefore সমানে সমানে যোগ করিলে,

আরত \angle খ'গ + আরত গ'গ অর্থাৎ \angle খ'গ'র উপর বঃ কোঃ

= \angle ক'খ'র উপর বঃ কোঃ + \angle ক'গ'র উপর বঃ কোঃ

\pm আরত মজ্জ \pm আরত ট'ব ।

আবার, \angle খ'কজ = সম \angle = \angle গ'কখ,

এবং উভয়দিকে \angle জ'কখ (১ম চিত্রে)

বা \angle খ'কগ (২য় চিত্রে)

যোগ করিলে,

\angle জ'কগ = \angle খ'কখ ।

আর জ'ক = খ'ক, ক'গ = ক'খ ।

$\therefore \triangle$ জ'কগ = \triangle খ'কখ (উঃ প্রঃ ১২) ।

\therefore আরত মজ্জ = আরত ট'ব ।

∴ **কর্গ**'র উপর বঃ ক্ষে:

$\frac{1}{2} \times$

= **কর্ধ**'র উপর বঃ ক্ষে: + **কর্গ**'র উপর বঃ ক্ষে:

$\pm 2 \times$ আরত মজ বা $\pm 2 \times$ আরত টর

= **কর্ধ**'র উপর বঃ ক্ষে: + **কর্গ**'র উপর বঃ ক্ষে:

$\pm 2 \times$ **কর্ধ** ও **কম** লইয়া আরত

বা $\pm 2 \times$ **কর্গ** ও **কট** লইয়া আরত ।

টিপ্পনী ১। যদি এক কজু রেখার দুই প্রান্ত হইতে অপর কোন কজুরেখার উপর দুই লম্ব টানা যায়, লম্বদ্বয়ের সম্মাতকিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত দ্বিতীয় রেখার অন্তর্গত দ্বিতীয় রেখার উপর প্রথম রেখার **প্রক্ষেপণী** বলা যায় ।



যথা, উপরের চিত্রে

মন, **সম**'র উপর **কর্ধ**'র প্রক্ষেপণী ।

উপরের ১ম ও ২য় চিত্রে

কম, **কর্ধ**'র উপর **কর্গ**'র প্রক্ষেপণী,

কট, **কর্গ**'র উপর **কর্ধ**'র প্রক্ষেপণী,

কারণ **ক** হইতে **কর্ধ** বা **কর্গ**'র উপর লম্বের সম্মাতকিন্দু **ক** ।

উপরি উক্ত পারিভাষিক শব্দ ব্যবহার করিলে,

এই প্রতিজ্ঞা সরলরূপে এইরূপে প্রকাশ করা যায়—

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর উপর হিত বর্গক্ষেত্র বর্ধিতকালে অপর বাহুদ্বয়ের উপর হিত বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর, বা তাহার সমান, বা তদপেক্ষ ক্ষুদ্রতর হইবে, যদি প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোন বর্ধিতকালে ত্রুণ কোণ, সমকোণ, বা সূত্র কোণ হয়, এবং সেই বৃহত্তা বা ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণ দ্বিতীয়োক্ত বহুদ্বয়ের যে কোন বাহু ও তদুপরি অপর বাহুর প্রক্ষেপণী এই উত্তর লইয়া আরত ক্ষেত্রের বিস্তার ।

টিপ্পন নী ২ । এই প্রতিজ্ঞা দুইবর্ষ ২১ প্রতিজ্ঞা ও পদবর্ষ ২৪ প্রতিজ্ঞা (যাহা বাবোন ভাবে সপ্রমাণ করা হইয়াছে) এই দুই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে নিম্নলিখিতরূপে প্রতিপন্ন করা যায় যথা,

$$গ^২ = ক^২ + গ^২ \text{ (উঃ প্রঃ ২১)}$$

$$= (কথ \pm কম)^২ + গ^২$$

$$= ক^২ \pm ২কথ.কম + কম^২ + গ^২ \text{ (উঃ প্রঃ ২৪, টিঃ ১, ২)}$$

$$= ক^২ + ক^২ \pm ২কথ.কম \text{ (উঃ প্রঃ ২১)} ।$$

৯। আয়ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২৪ ।

যদি কোন ঋজুরেখা যে কোন দুই খণ্ডে বিভক্ত কর। যাহা, তাহা হইলে সমস্ত রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, খণ্ডদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয় ও ঋজুরেখার অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ, এই তিনের সমষ্টির সমান হইবে ।



যনে কর কথ'কে কগ' ও গথ' দুই খণ্ডে বিভক্ত করা হইয়াছে ।

তাহা হইলে কথ'র উপর বঃ ক্ষে:

= কগ'র উপর বঃ ক্ষে: + গথ'র উপর বঃ ক্ষে:

+ ২ × আয়ত কগ', গথ' ।

যনে কর কহ'কথ', কঘ'ওগ' ও গচ'জথ',

কথ', কগ', ও গথ'র উপর বঃ ক্ষে: ।

গ'ও বর্জিত কর এবং যনে কর ঞ'তে হ'ব'র সহিত মিলিত হইয়াছে ।

তাহা হইলে, ∴ কহ = কথ', এবং কঘ = কগ',

∴ ঘহ = গথ' । এবং ঘও = কগ' ।

আবার, ∴ থব = কথ', এবং থজ = গথ',

∴ জব = কগ' । এবং চজ = গথ' ।

∴ আয়ত ঘঞ = আয়ত ঘও, ঘহ = আয়ত কগ', গথ' ।

এবং আয়ত জঞ = আয়ত জব, চজ = আয়ত কগ', গথ' ।

এবং কহবথ = কষঙগ + গচক্রথ + ঘঞ + ক্রঞ ।

∴ কথ'র উপব বঃ ক্বে = কগ'র উপব বঃ ক্বে + গথ'র উপব বঃ ক্বে
+ ২ × আরত কগ, গথ ।

অনুমান ১। যদি কগ = গথ,

কথ'র উপব বঃ ক্বে = ৪ × কগ'র উপব বঃ ক্বে ।

অনুমান ২। যদি দুটি ঋজুবেথার একটি অবিভক্ত থাকে ও অপবটি নানা খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে ঐ রেখার লইয়া যে আরত হয় তাহা, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার প্রত্যেক খণ্ড লইয়া যে যে আরত হয় তাহাদের সমষ্টির সমান হইবে ।

বথা, আরত কহ, কগ = আরত কষ, কগ
+ আরত ঘহ, কগ ।

টিপ্পনী ১। যদি কগ = অ, থগ = ই,

তাহা হইলে কথ = অ + ই,

এবং (অ + ই)^২ = অ^২ + ২ অই + ই^২ ।

বীজগণিতের এই সাংকেতিক ভাষা, উপরের ২৪ উপশাস্ত্র প্রতিজ্ঞার অনুরূপ ।

টিপ্পনী ২। যদি কথ = অ, থগ = ই,

তাহা হইলে কগ = অ - ই,

এবং বঃ ক্বে কঙ = বঃ ক্বে কব + বঃ ক্বে গজ
- আরত ঘব - আরত গব,

অর্থাৎ (অ - ই)^২ = অ^২ - ২ অই + ই^২ ।

টিপ্পনী ৩। যদি কগ = অ, থগ = ই,

তাহা হইলে

অ (অ + ই) = কট = কঙ + গট
= অ^২ + অই ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২৩ ।

‘যদি কোণ ঋজুরেখা সমবিশিষ্টে, ও অন্তরে
বিশ্বম দ্বিখণ্ডে, বিভক্ত হয়, তাহা হইলে তাহার
অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের ও বিভাগ বিন্দু-
দ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের
অন্তর তাহার বিশ্বম খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত
আয়তের সমান হইবে ।



মনে কর । কখ, গতে সমবিশিষ্টে ও ঘ'তে বিশ্বম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত ।

তাহা হইলে গখ'র উপর বঃকে:—গঘ'র উপর বঃকে:—আয়ত কঘ.ঘখ ।

মনে কর গউচখ ও গজহঘ, গখ'ব ও গঘ'ব উপর বঃ কে: ।

যহকে বর্দ্ধিত করিয়া ঋতে উচ'র সহিত মিলাও ।

তাহা হইলে, \therefore খচ=খগ=কগ,

\therefore আয়ত ঘচ=আয়ত কগ.ঘখ ।

আবার, \therefore গউ=গখ, গঘ=গজ,

\therefore জউ=ঘখ ।

এবং জহ=গঘ ।

\therefore আয়ত জঝ=আয়ত গঘ.ঘখ ।

\therefore আয়ত ঘচ+আয়ত জঝ=আয়ত কগ.ঘখ+ আয়ত গঘ.ঘখ
=আয়ত (কগ+গঘ) ঘখ
=আয়ত কঘ.ঘখ ।

অতএব, গখ'র উপর বঃ কে:—গঘ'র উপর বঃ কে:

=গচ-গহ=ঘচ+জঝ

=আয়ত কঘ.ঘখ ।

অনুমান । অতএব কোন স্বরু রেখা দুই খণ্ডে বিভক্ত হইলে সেই খণ্ডদ্বয় যখন সমান হইবে তখন তাহাদের অন্তর্গত আরত বৃহত্তম হইবে ।

কারণ আরত $\text{কগ} \cdot \text{গখ} = \text{গখ}^2 = \text{কঘ} \cdot \text{ঘখ} + \text{গই}^2$
 $\text{আরত কঘ} \cdot \text{ঘখ} ।$

টিপ্পনী ১ । যদি $\text{কগ} = \text{গখ} = \text{অ}$, $\text{গঘ} = \text{ই}$, তাহা হইলে

$\text{কঘ} = (\text{অ} + \text{ই})$, $\text{ঘখ} = (\text{অ} - \text{ই})$,

এবং $\text{অ}^2 - \text{ই}^2 = (\text{অ} + \text{ই})(\text{অ} - \text{ই})$ ।

বীজগণিতের এই সাঙ্কেতিক বাক্য, উপরের ২৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুরূপ ।

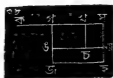
টিপ্পনী ২ । যদি অনেকগুলি আরতন কতকগুলি নির্দিষ্ট নিয়মাবলীন হয়, তবে তন্মধ্যে বৃহত্তম আরতনকে **পান্নিষ্ঠ ফল** ও ক্ষুদ্রতম আরতনকে **লঘিষ্ঠ ফল** বলে ।

যথা, ককুরেখার খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আরতের পরিষ্ঠ ফল খণ্ডদ্বয় সমান হইলেই পাণ্ডরা যায় । তাহা উপরের অনুমানে প্রদর্শিত হইয়াছে ।

আবার কোন বিন্দু হইতে কোন ককুরেখার উপর বত স্বরু রেখা টানা বাইতে পারে, তাহাদের লঘিষ্ঠ ফল লঘ । তাহা ১০ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুমানে প্রদর্শিত হইয়াছে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২৬।

যদি কোন ঋজুরেখা সমবিক্ষেপে বিভক্ত,
ও কোন বিন্দু পর্যন্ত বর্দ্ধিত, অর্থাৎ সেই
বিন্দুতে বাহিরে বিকল্প দ্বিখণ্ডে বিভক্ত, হয়,
তাহা হইলে তাহার অক্টেকের উপর বর্গ-
ক্ষেত্রের ও ঐ বিভাগবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত
অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তর তাহার
বিকল্প ঋজুরের অন্তর্গত আন্তের সমান
হইবে।



মনে কর । কখ, গতে সম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত,
ও ঘকে বাহিরে বিকল্প দ্বিখণ্ডে বিভক্ত, অর্থাৎ ঘ পর্যন্ত বর্দ্ধিত ।
তাহা হইলে ঘগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ—গখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ
= আরত কঘ.ঘখ ।

মনে কর গঙচখ, গজহঘ, গখ'র ও গঘ'র উপর বঃ ক্ষেঃ,
এবং গচকে বর্দ্ধিত করিয়া ঐতে ঘহ'র সহিত মিলাও ।

তাহা হইলে ২৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যে রূপে প্রদর্শিত হইয়াছে
সেইরূপ দেখা বাইবে,

আরত ঘচ = আরত কগ.ঘখ,

আরত জঝ = আরত গঘ.ঘখ ।

∴ আরত ঘচ + আরত জঝ = আরত কগ.ঘখ + আরত গঘ.ঘখ
= আরত (কগ + গঘ).ঘখ
= আরত কঘ.ঘখ ।

অতএব গম্ব'র উপর বঃ কে:- গম্ব'র উপর বঃ কে:

$$= গহ-গচ=ঘচ+জব$$

$$= অরিত কঘ-ঘথ ।$$

টপ্লনী ১ । যদি কগ=গথ-অ, গঘ=ই, তাহা হইলে,

$$কঘ=ই+অ, ঘথ=ই-অ,$$

$$\text{এবং } ই^২ - অ^২ = (ই+অ) (ই-অ) ।$$

অতএব উপরের ২৫ ও ২৬ উভয় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞাব ভব বীজগণিতের একই সাঙ্কেতিক বাক্য দ্বারা প্রকাশ করা যায় ।

টপ্লনী ২ । যদি কোন কজুরেখা কোন বিন্দু পর্যন্ত বঙ্কিত হয়, তাহা হইলে সেই বিন্দুকে তাহার বাহিরের দিক বিভাগ বিন্দু স্বরূপ মনে করা যাইতে পারে । এবং সেই ভাবে দেখিলে, সেই বিন্দু হইতে তাহার সীমাবিন্দুয়ের দূরত্ব তাহার দুই খণ্ড বলিয়া মনে করা যাইতে পারে । তাহা সেই খণ্ডদ্বয় মধ্যে একখণ্ড সেই কজুরেখা অপেক্ষা বড় হইবে ।

কারণ তাহারা একের সম্পূর্ণ বাহিরে অপর থাকিতে পারে না,

\therefore ঋ+গ>ক বা ঘচ ।

এবং একের সম্পূর্ণ ভিতরেও অপর থাকিতে পারে না,

\therefore ক+ঋ>গ, ও ক+গ>ঋ ।

মনে কর বৃত্তঘর জ্ঞ'তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে ।

জঘ, জচ যোগ কর ।

তাহা হইলে Δ জঘচ ইট Δ ।

কারণ, ঘচ= | ক, ঘজ= | ঋ, ও জচ= | গ ।

টপ্লনী । নির্দিষ্ট রেখাভয়ের যে কোন দুটিন সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বড় হওয়া আবশ্যক । কারণ তাহা না হইলে সেই রেখাভয় কোন ত্রিভুজের বাহুভয়ের সমান হইতে পারে না, যেহেতুক ত্রিভুজ মাত্রের যে কোন বাহুভয়ের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড় (উঃ প্রঃ ১১ স্টেবা) । এবং ঐ কথা রক্ষা না হইলে উপরের চিত্রে বৃত্তঘর পরস্পরকে ছেদ করিবে না ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-২ ।

নির্দিষ্ট ঋজু রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত কর ।



মনে কর কখ নির্দিষ্ট । , ক নির্দিষ্ট বিন্দু,

এবং \angle গঘঙ নির্দিষ্ট \angle ।

কখ । 'র ক বিন্দুতে \angle গঘঙ'র সমান \angle আঁকিতে হইবে ।

ঘগ'তে যে কোন বিন্দু গ লইয়া ঘকে কেন্দ্র ও ঘগকে ব্যাসার্ধ করিয়া

০ গঙ আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত ঘঙকে ঙ'তে ছেদ করিতেছে ।

ঙগ বোগ কর ।

ককে কেন্দ্র ও ঘগকে ব্যাসার্ধ করিয়া ০ চজ আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত কখকে চ'তে ছেদ করিতেছে ।

চকে কেন্দ্র ও গঙকে ব্যাসার্ধ করিয়া একটি ০ আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত ০চজকে জ'তে ছেদ করিতেছে ।

কজ ও চজ বোগ কর ।

তাহা হইলে \angle চকজ ইষ্ট \angle হইবে ।

কারণ কচ=ঘগ, কজ=ঘঙ, চজ=গঙ,

$\therefore \angle$ চকজ = \angle গঘঙ (উঃ প্রঃ ১০) ।

অনুমান । ত্রিভুজের নির্ণায়ক যে কোন অবয়বত্রয় নির্দিষ্ট থাকিলে, এই প্রতিজ্ঞা এবং ইহার পূর্ববর্তী প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সেই ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে পারা যায় ।

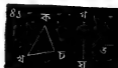
১। নির্দিষ্ট অবয়বত্রয় তিনটি বাহু হইলে, সঃ প্রঃ ১ দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে ।

২। নির্দিষ্ট অবয়বত্র দুই বাহ ও তদন্তর্গত কোণ হইলে,

বাহ কখ'র ক বিন্দুতে \angle খকচ = নির্দিষ্ট \angle ও

অঙ্কিত কবিতা, কচ = বাহ গঘ করিয়া লইয়া

খচ যোগ করিলে, Δ কখচ ইষ্ট Δ হইবে।



৩। নির্দিষ্ট অবয়বত্র দুই কোণ ও এক বাহ হইলে, নিম্নের অঙ্কন প্রক্রিয়া অবলম্বনীয়।



মনে কর \angle গকঘ ও \angle ওখচ ও বাহ জহ, বা টজ, নির্দিষ্ট অবয়ব ত্রয়।

প্রথমতঃ মনে কর বাহ জহ নির্দিষ্ট কোণত্রয়ের সংলগ্ন।

জহ'র জ ও হ বিন্দুতে \angle টজহ = \angle গকঘ,

\angle টহজ = \angle ওখচ আক।

তাহা হইলে Δ টজহ ইষ্ট Δ হইবে।

দ্বিতীয়তঃ, মনে কর নির্দিষ্ট বাহ টজ \angle ওখচ'র বিপরীত।

তাহা হইলে টজ'র সংলগ্ন অপর \angle জটহ

এইরূপে জানা যাইবে। যথা,

গক'র ক বিন্দুতে \angle গকখ = ওখচ আক,

এবং ঘক কে এও তে বর্ধিত কর।

তাহা হইলে \angle বাকএও অবশ্যই ত্রিভুজের ৩য় \angle হইবে,

\therefore তাহার তিনটি \angle একত্র = ২ সম \angle ।

অতএব চক্ৰ'র সংলগ্ন \angle দ্বয় জানা গেল,
এবং প্রথম স্থানের প্রক্লিমা বাবা ইষ্ট Δ আঁকা যাইবে ।

৪। নির্দিষ্ট অবয়বের দুই বাহু (কথ, গম্ব) ও তাহাদের একের
(গম্ব'র) বিপরীত কোণ (\angle উ) হইলে, নিম্নের প্রক্লিমা অবলম্বনীয় ।



খক'র ক বিদূতে \angle খকচ = \angle উ আঁক ।

খ কে কেন্দ্র ও গম্ব কে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot চক্ৰ আঁক ।

তাহা হইলে Δ কথচ বা Δ কথক ইষ্ট Δ হইবে ।

যদি গম্ব $<$ কথ ও \angle উ $<$ সম \angle হয়,

তাহা হইলে ইষ্ট Δ দুইটি বা একটি হইবে, বা একটিও হইবে না,

যদি গম্ব $>$ কথ $<$ \perp খ হইতে চক্ৰ'র উপর ।

যদি \angle উ = বা $>$ সম \angle ,

তাহা হইলে অল্পতই গম্ব $>$ কথ,

এবং সে স্থলে একটি মাত্র ইষ্ট Δ হইবে ।

২। কোণ ও ঋতু রেখা সমান্তরাল করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমান্তরাল কর।



মনে কর \angle খকগ কে সমান্তরাল করিতে হইবে।

কখ তে যে কোন বিন্দু খ লইয়া,
ক কে কেন্দ্র ও । কখ কে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot খগ ঋক,
এবং মনে কর \odot খগ, । কগ কে গ তে ছেদ করিতেছে।

খ কে কেন্দ্র ও । খগ কে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot গঘ ঋক,
গ কে কেন্দ্র ও । গখ কে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot খঘ ঋক,
মনে কর শেষোক্ত বৃত্তের ঘ'তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে,
এবং কঘ, খঘ, গঘ যোগ কর।

| কঘ \angle খকগ কে সমান্তরাল করিতেছে।

কারণ, Δ খকঘ ও Δ গকঘ তে

কখ = কগ, কঘ উভয়েতেই আছে, ও খঘ = খগ = গঘ,

$\therefore \angle$ খকঘ = \angle গকঘ (উঃ প্রঃ ১০)।

টিপ্পনী ১। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন কোণকে θ , ϕ , 180 ইত্যাদি সমান ভাগে বিভক্ত করা যায়।

টিথনো ২ । কঘ'র যে কোন বিন্দু ঘ হইতে লম্ব ঘঙ , ঘচ , কঙ , কচ'র উপর টানিলে, $\triangle \text{কঘঙ}$ ও $\triangle \text{কঘচ}$ হইতে $\text{ঘঙ} = \text{ঘচ}$ (উঃ প্রঃ ১৪) ।

অতএব কঘ'র যে কোন বিন্দু কঙ ও কচ হইতে সমদূরবর্তী ।

যদি কোন বিন্দু কোন নিরম্বাধীনে চলে, তাহা হইলে তাহার চলনে যে ঋজু বা কুটিল রেখা অঙ্কিত হয় তাহাকে সেই বিন্দুর **নিস্ক্রান্ত স্থান** বলে ।

অনুমান । যে বিন্দু সম্প্রতি ঋজু রেখাঘরেব সমদূরবর্তী তাহার নিয়ত স্থান সেই রেখাঘরের অন্তর্গত কোণের সবস্থিগু কারী ঋজু রেখা ।

সম্পাদ্য প্রতিভা-৪।

একটি নির্দিষ্ট স্বাক্ষরেখা সমন্বিতও কর।



মনে কর । কথাকে সম্বন্ধিতও করিতে হইবে ।

ককে কেন্দ্র ও কথাকে ব্যাসার্দ্ধ নহে। ৩। পঞ্চম আক.

থকে কেন্দ্র ও থককে ব্যাসার্দ্ধ নইয়া ৩ গুণক আঁক.

এবং ৩ ঘরের ছেদ বিন্দুদ্বয় গ, ঘ, যোগ কর।

কথ'র সহিত গুণ'র সম্পাত বিন্দু উভে কথ' সমন্বিতও হইবে।

কারণ কৰ্গ, কষ, থৰ্গ, থষ যোগ করিলে দেখা যায়,

Δ কগষ ও Δ খগষ তে,

কগ = কখ = খগ, গখ উভয় Δ এতে আছে

এবং কষ = কখ = খষ,

$\therefore \angle \text{कगघ} = \angle \text{खगघ}$ (उ: अ: १७)।

আবার, Δ কগঙ ও Δ খগঙতে,

কগ = খগ, গঙ উভয় Δ এতে আছে, এবং

$$\angle \text{কগনড} = \angle \text{খগনড},$$

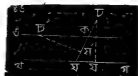
∴ कउ = ३७ (उ: व्य: १२)।

টিপ্পনী । এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন কক্ষ রেখাকে ৩, ৮, ১০ ইত্যাদি সমান ভাগে বিভক্ত করা যাইতে পারে ।

৩। সমান্তর ও লম্ব ঋজুরেখা অঙ্কিত করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৫ ।

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখার সমান্তর ঋজুরেখা অঙ্কিত কর ।



মনে কর ক বিন্দু দিয়া | খগ'ব || ঋ: রে: টানিতে হইবে ।

খগ'তে যে কোন এক বিন্দু ঘ লইয়া ঘক যোগ কর,

এবং $\angle ঘকঙ = \angle কঘগ$ অঙ্কিত কব (স: প্র: ২) ।

তাহা হইলে $কঙ \parallel খগ$ ।

কারণ, $\therefore \angle ঘকঙ = \angle কঘগ$,

$\therefore কঙ \parallel খগ$ (উ: প্র: ৫) ।

টিপ্পনী । ব্যবহারে লচবাচর মাটিমেব সাহায্যে সমান্তর টানা যায় । অথা চঘঘ ও চ'ঘ'ক এই দুই স্থানে মাটিম থরিলে, $\angle চ'কঘ = \angle চঘঘ$, হতরায় $কচ' \parallel খগ$ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখাতে বা তাহার বাহিরে স্থিত একটি বিন্দু হইতে তদুপরি লম্ব টান।



(১)

(২)

১। মনে কর | কথতে স্থিত গ বিন্দু হইতে কথ'র উপর \perp টানিতে হইবে।

গক = গঘ করিয়া লইয়া,

তাহার উপর সমবাহু Δ কঙঘ অঙ্কিত কর (সঃ প্রঃ ১),

এবং গুগ বোগ কর।

গুগ \perp কথ হইবে।

কারণ Δ কগুঙ ও Δ ঘগুঙতে,

কগ = ঘগ, গুঙ উভয় Δ এতে আছে, এবং কঙ = ঘঙ,

$\therefore \angle$ কগুঙ = \angle ঘগুঙ (উঃ প্রঃ ১০) = সম \angle ।

২। মনে কর | কথ'র বাহিরে স্থিত গ বিন্দু হইতে কথ'র উপর \perp টানিতে হইবে।

কথ'র অপর দিকে যে কোন বিন্দু ঘ লইয়া,

গকে কেন্দ্র ও গঘকে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot গঘচ আঁক,

এবং মনে কর তাহার সহিত | কথ'র ছেদবিন্দু গু ও চ।

| গুচকে জুতে সমন্বিত কর (সঃ প্রঃ ৪),

এবং গজ, গঙ, গচ বোগ কর।

তাহা হইলে গজ \perp কথ।

কারণ, Δ গজুঙ ও Δ গজুচতে,

জুঙ = জুচ, জুগ উভয় Δ এতে আছে, এবং গুঙ = গুচ,

$\therefore \angle$ গজুঙ = \angle গজুচ (উঃ প্রঃ ১০) = সম \angle ।

অনুমান ১। প্রথম চিত্রে গুঙ হিত প্রত্যেক বিন্দু, ক ও ঘ হইতে সমদূর্ববর্তী। অর্থাৎ যে কোন বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূর্ববর্তী বিন্দুর নিম্নত স্থান, সেই বিন্দুদ্বয়ের যোজক ঋজুরেখার মধ্যবিন্দু হইতে তদুপরি লম্ব।

অনুমান ২। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখা কথ'র উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে পাওয়া যায়।

কথ'র উপর \perp কর্গ টান, কর্গ = কথ করিয়া

লঙ, থঘ ॥ কর্গ এবং গঘ ॥ কথ টান।

তাহা হইলে কথঘর্গ বর্গক্ষেত্র হইবে।



৪। ঋজু রেখা সমান ভাগে বিভক্ত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৭।

একটি নির্দিষ্ট ঋজু রেখা নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত কর।



মনে কর | কখকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

ক হইতে আর একটি বে কোন | কঙ টান,

কগ = গঘ = ঘঙ করিয়া লও, খঙ যোগ কর,

এবং গচ ও ঘজ ॥ ওখ টান।

তাহা হইলে | কখ, চ ও জতে সমান তিন খণ্ডে বিভক্ত হইবে।

কারণ :: চগ ॥ জঘ ॥ খঙ,

এবং কগ = গঘ = ঘঙ,

∴ কচ = চজ = জখ, (উঃ প্রঃ ১৭, অহুঃ ৩)।

অনুমান ১। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে ভূমির সমান্তর ঋজু রেখা টানিলে তাহা অপর বাহুকে সমবিখণ্ড করিবে।

এবং পরিবৃত্তক্রমে, ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্য বিন্দুদ্বয়ের যোজক ভূমির সমান্তর হইবে।

এই অনুমানের প্রথম কথাটির সত্যতা এত প্রতিজ্ঞার প্রমাণেই প্রতিপন্ন।

বিত্তি কথাটি সপ্রমাণ করণার্থে,
যনে কর গ ও চ, কষ ও কজ'র মধ্য বিন্দুহর ।
তাহা হইলে চর্গ ॥ জষ ।

যদি না হয়, যনে কর চর্গ ॥ জষ ।
তাহা হইলে কর্গ = কষ = কগ,
অতএব গ ও গ' তিন্ন হইতে পারে না ।

অনুমান ২ । যদি হ, জষ'র মধ্যবিন্দু হয়, তাহা হইলে
কচর্গ, জচর্গ, ও ঞগচর্গ সামান্তবিক, এবং
চর্গ = জষ, চহ = ঞক, ও হর্গ = কজ ।

৫। নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র,
সামান্তরিক, ও ত্রিভুজ অঙ্কিত
করুন।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮।

একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের আকারকে একরূপে বিভক্ত
কর যে সমস্ত রেখা ও তাহার একাংশের
অন্তর্গত আয়ত অপেক্ষে অংশের উপরিস্থ
বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।



মনে কর ঃ রে: কখকে একরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যে, কখ ও
তাহার একাংশের অন্তর্গত আয়ত = অপর অংশের উপরিস্থ ঃ কে:।

কখ'র উপর কগখখ ঃ কে: আঁক (স: প্র: ৬, অমু: ২),
কগকে ঙতে সমন্বিত কর (স: প্র: ৪), খঙ বোগ কব,
ঙক বর্দ্ধিত করিয়া ঙচ—ঙখ করিয়া লও,
কচ'র উপর কচজহ ঃ কে: আঁক, এবং জহকে ঃ পর্যন্ত বর্দ্ধিত কব।
তাহা হইলে হু ইষ্ট বিভাগ বিন্দু হইবে।

কারণ \therefore গক, ঙতে সমান বিখণ্ডে বিভক্ত, ও চতে বর্দ্ধিত, হইয়াছে,

\therefore আয়ত গচ-চক + কঙ'র উপর ঃ কে:

= ঙচ'র উপর ঃ কে: (উ: প্র: ২৬)

= ঙখ'র উপর ঃ কে:

= কখ'র উপর ঃ কে: + কঙ'র ঃ কে: (উ: প্র: ২১)।

এবং উভয় দিক হইতে কঙ'র উপর বঃ কেঃ বাদ দিলে,

আয়ত গচ.চক = কথ'র উপর বঃ কেঃ,

অর্থাৎ আয়ত চগবাজ = বঃ কেঃ কথ'ঘগ' ।

এবং উভয় দিক হইতে আয়ত কগবাজ বাদ দিলে,

বঃ কেঃ কহজচ = আয়ত কব'ঘথ' ।

অর্থাৎ কহ'র উপরের বঃ কেঃ = আয়ত কথ'খথ' ।

টিপ্পননী । বীজগণিত অনুসারে এই সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা এইরূপে সম্পাদিত হইবে ।

মনে কর কথ' = অ,

এবং একটি নির্ণয়ের অংশ = স,

তাহা হইলে অপব অংশ = অ - স,

এবং $s^2 = অ (অ - স)$ ।

$\therefore s^2 + অস - অ^2 = ০$,

$$\therefore s = \frac{-অ \pm \sqrt{৫ অ^2}}{২}$$

$$= \frac{\sqrt{৫ অ^2}}{২} - \frac{১}{২} অ \quad (+ চিহ্ন নইলে)$$

উপরের চিত্রের সহিত স'র এই মান মিলাইয়া দেখা যাউক ।

$$ঙথ^২ = কথ^২ + কঙ^২ = কথ^২ + \frac{১}{২} কথ^২$$

$$= \frac{৫}{২} কথ^২,$$

$$\therefore ঙথ = ঙচ = \sqrt{\frac{৫}{২}} কথ;$$

$$\text{এবং কহ} = কচ = ঙচ - ঙক = \frac{\sqrt{৫}}{২} কথ - \frac{১}{২} কথ ।$$

অতএব বীজগণিতের সম্পাদন প্রণালী হইতে জ্যামিতির সম্পাদন প্রণালীর স্পষ্ট আভাস পাওয়া যায় ।

সম্পাদনা প্রতিজ্ঞা—৯।

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কিত কর।



মনে কর $\triangle কখগ$ 'র সমান এবং
 $\angle ঘ$ 'র সমান কোণ বিশিষ্ট \square অঙ্কিতে হইবে।
 $খগ$ কে $উ$ তে সরষিখণ্ড কর (সঃ প্রঃ ৪),
 $\angle গউচ = \angle ঘ$ অঙ্কিত কর, (সঃ প্রঃ ২),
 $গজ \parallel উচ$, $কজ \parallel উগ$ টান,
 এবং মনে কর $কজ$ ও $উচ$ 'র ছেদ বিন্দু $চ$ ।
 তাহা হইলে $চউ$ $গজ$ ইষ্ট সামান্তরিক হইবে।
 কারণ, $\therefore খউ = উগ$, $\therefore \triangle কউখ = \triangle কউগ$,
 এবং $\therefore \triangle কখগ = ২ \times \triangle কউগ = \square চউগজ$ ।
 এবং $\angle চউগ = \angle ঘ$ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-১০ ।

যে কোন নির্দিষ্ট ঋজু রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর ।



মনে কর ঋজু রৈখিক ক্ষেত্র কখগঘচ'র সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে,

বাহ্যর ভূমি গঘ রেখার মিলিত, ও তদ্বিপরীত কোণ ক হইবে ।

ক হইতে ভিন্ন ভিন্ন কোণে । টানিয়া

ক্ষেত্রটিকে ভিন্ন ভিন্ন ত্রিভুজে বিভক্ত কর ।

এবং খজ ॥ কগ, চহ ॥ কঙ, হখ ॥ কঘ টান,

ও বর্দ্ধিত করিয়া যথাক্রমে ঘগ, ঘঙ, গঘ'ব সহিত জ, হ, খ'তে মিলাও ।

এবং কজ, কহ, কখ যোগ কর ।

তাহা হইলে Δ কজখ ইষ্ট Δ হইবে ।

কারণ, \therefore খজ ॥ কগ, Δ কখগ = Δ কজগ,

\therefore চহ ॥ কঙ, \therefore Δ কঙচ = Δ কঙহ,

এবং \therefore হখ ॥ কঘ, \therefore Δ কহঘ = Δ কখঘ ।

$\therefore \Delta$ কজখ = Δ কজগ + Δ কগঘ + Δ কখঘ

= Δ কখগ + Δ কগঘ + Δ কহঘ

= Δ কখগ + Δ কগঘ + Δ কঘঙ + Δ কঙহ

= Δ কখগ + Δ কগঘ + Δ কঘঙ + Δ কঙচ

= ক্ষেত্র কখগঘঙচ ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞা ও ৯ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন নির্দিষ্ট রৈখিক ক্ষেত্রের সমান আরও অঙ্কিত করিতে পারা যায় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-১১।

যে কোন নির্দিষ্ট ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা।



মনে কব ঋজু রৈখিক ক্ষেত্র 'র'র সমান একটি বঃ ক্ষেঃ আঁকিতে হটবে।

র'র সমান আরত কথগুণ আঁক (সঃ প্রঃ ১০, অঃ)।

কথ বর্দ্ধিত করিয়া খঙ = খগ করিয়া লও।

কঙ কে চ তে সমন্বিতও করিয়া

চ'কে কেন্দ্র ও চঙ কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া \odot উজ্জ্বল আঁক।

গথ কে বর্দ্ধিত করিয়া সেই \odot সহ জ তে মিলিত কর, ও চজ বোগ

কর।

তাহা হইলে খজ'র উপর বঃ ক্ষেঃ ইষ্ট বঃ ক্ষেঃ হইবে।

কারণ, \therefore কঙ, চ'তে সমন্বিতও ও খ'তে বিদ্য দ্বিতও বিভক্ত,

\therefore আরত কথ.খঙ + চখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= চঙ'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= চজ'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= খজ'র উপর বঃ ক্ষেঃ + চখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

\therefore উভয় দিক হইতে চখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ বাদ দিলে,

আরত কথ.খঙ = খজ'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

কিন্তু আরত কথ.ঙথ = আরত কথ.খগ

= কেন্দ্র র,

\therefore খজ'র উপর বঃ ক্ষেঃ = কেন্দ্র র।

অম্মুখ্যাম্ । বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে ব্যাসের উপর লম্ব টানিলে, লম্বের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, লম্বদ্বারা বিভক্ত ব্যাসের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে ।

টীকানী । এই প্রতিজ্ঞার একটু বিভিন্নরূপে সম্পাদন প্রাচীন গ্রীক কালে হিন্দুরা জানিতেন । বঙ্গের এশিয়াটিক সোসাইটির পত্রিকা, ৪৪ সংখ্যা, ২৪৫ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য ।

৬। একটি বিশেষ প্রকার সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর সাহায্য ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ হইবে।



একটি । কখ লইয়া তাহাকে ঘ'তে এরূপে ভাগ কর যে
 কখ·খঘ = কঘ^২ (সঃ প্রঃ ৮),
 খঘ'কে উতে সমদ্বিখণ্ড কর, ওগ \perp কখ টান,
 ঘ'কে কেন্দ্র ও ঘককে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot কর্ণ আঁক,
 এবং মনে কর ঐ \odot ওগকে গ'তে ছেদ করিতেছে।

গক, গখ, গঘ যোগ কর।

তাহা হইলে Δ কখগ ইষ্ট Δ হইবে।

কারণ, $\text{কগ}^2 = \text{কঘ}^2 + \text{গঘ}^2 + ২\text{কঘ ওঘ}$ (উঃ প্রঃ ২০)
 $= \text{কঘ}^2 + \text{কঘ}^2 + \text{কঘ} \cdot \text{খঘ}$ (\because গঘ = কঘ, খঘ = ২ওঘ)
 $= \text{কঘ}^2 + \text{কখ} \cdot \text{কঘ}$ (উঃ প্রঃ ২৪, টিঃ ৩)
 $= \text{কখ} \cdot \text{খঘ} + \text{কখ} \cdot \text{কঘ}$ (\because কঘ^২ = কখ·খঘ)
 $= \text{কখ}^2$ (উঃ প্রঃ ২০, টিঃ ৩)।

\therefore কগ = কখ এবং $\therefore \triangle$ কখগ সমধিবাহ।

এবং \angle খ = \angle গঘগ ($\because \triangle$ গখগ, \triangle গঘগ সর্বোংশে সমান)
 $= \angle$ ক + \angle কগঘ = \angle ক + \angle ক (\because গঘ = কঘ) ।
 $= ২ \times \angle$ ক ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞাব সাহায্যে সমকোণ কে পাঁচ ভাগে বিভক্ত করা যায় ।

কারণ \angle ক + \angle খ + \angle খগক = $৫ \times \angle$ ক
 $= ২$ সম \angle ,

$\therefore \angle$ ক = $\frac{১}{৫} \times ২$ সম \angle ,

এবং $\therefore \frac{১}{৫} \angle$ ক = $\frac{১}{৫}$ সমকোণ ।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণ ।

উপপ্রস্তাবনিকা । জ্যামিতির প্রসঙ্গসাধান বীজগণিতের প্রসঙ্গসাধান অপেক্ষা কিঞ্চিৎ কঠিন, কারণ জ্যামিতির প্রসঙ্গসাধানপ্রক্রিয়া বীজগণিতের প্রসঙ্গসাধানপ্রক্রিয়ার জার নির্দিষ্ট নিয়মাধীন নহে । জ্যামিতির প্রসঙ্গসাধানে নৈপুণ্যলাভ কেবল অভ্যাসের ফল ।

জ্যামিতির প্রসঙ্গসাধানার্থে সাধারণ নিয়ম স্বরূপে যাহা বলা হইতে পারে তাহা এই ।—

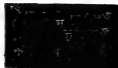
প্রথমটি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইলে, মনে কর তাহার সত্যতা সপ্রমাণ হইরাছে, অথবা তাহা সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা হইলে, মনে কর তাহা সম্পাদিত হইরাছে । তদনন্তর প্রথম সঞ্চরীয় চিত্রেব প্রতি লক্ষ্য করিয়া দেখ, যে তথ্যটি সপ্রমাণ করিতে হইবে তাহার সত্যতা মানিয়া গইলে ক্রমান্বয়ে কোন্ কোন্ পরিজ্ঞাত তথ্যে উপনীত হওয়া যায়, অথবা যে অঙ্কন কাঁচাটি সম্পাদন করিতে হইবে তাহা সম্পাদিত হইরাছে বলিয়া স্বীকার করিলে ক্রমান্বয়ে কোন্ কোন্ পরিজ্ঞাত বিন্দু বা রেখাতে উপনীত হওয়া যায় । এবং পবিশেষে দেখ সেই সেই পরিজ্ঞাত তথ্য অথবা বিন্দু রেখাদি হইতে বিপরীতক্রমে কিরূপে সেই উপপাদ্য তথ্যে অথবা সম্পাদ্য অঙ্কনে উপনীত হওয়া যায় ।

এ সম্বন্ধে গণিতবেত্তা প্রক্টর তাঁহার কৃত “জ্যামিতির প্রথম সোপান” নামক গ্রন্থে বলিয়াছেন, “জ্যামিতির বিশেষ বিশেষ প্রসঙ্গসাধানের প্রক্রিয়া জানা অপেক্ষা, কি প্রণালীতে চলিলে সাধারণতঃ জ্যামিতির প্রসঙ্গসাধানের সহায়তা কর তাহা জানাই গণিত বিদ্যার্থীর অধিকতর উপযোগী ।”

বিশেষ প্রয়োজনীয় তত্ত্বমূলক করেকটি উদাহরণ নিয়ে উপপন্ন বা সম্পাদিত করা হইল । এবং আর করেকটি উদাহরণ বিদ্যার্থী উপপন্ন বা সম্পাদিত করিবেন বলিয়া দিওয়া গেল ।

উপপন্ন বা সম্পাদিত উদাহরণ ।

- ১। যদি | কখ'র মধ্যবিন্দু গ ও সীমাবিন্দু
খ হইতে সমান্তর | গঘ ও খঙ টানা যায়, এবং
গঘ=২ খঙ হয়,
তবে ক, ঘ, ও, একরেখায় বিন্দু হইবে।



কারণ, যদি কঙ যোগ করা যায় এবং মনে করা যায় কঙ ও গঘ'র
সম্পাত বিন্দু চ, তাহা হইলে

$$\text{কচ} = ২ \text{ কঙ (স: প্র: ৭, অমু: ১)},$$

$$\text{এবং গচ} = ২ \text{ খঙ (ঐ, অমু: ২)।}$$

$$\text{কিন্তু গঘ} = ২ \text{ খঙ,}$$

$$\therefore \text{গঘ} = \text{গচ অর্থাৎ ঘ ও চ ভিন্ন নহে।}$$

- ২। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু ও তদ্বিপরীত কোণের বোজক
খজু বেখাজয় একবিন্দুযুগ্মী।

মনে কর, ঘ ও ও, কখ ও কগ'র মধ্যবিন্দু,
জ, গঘ ও খঙ'র সম্পাতবিন্দু, এবং কজ বিন্দিত
হইয়া চ'তে



খগকে ছেদ করিতেছে। তাহা হইলে যদি চ, খগ'র মধ্যবিন্দু হয়
তবে এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করা হইবে।

মনে কর খহ ও গব, কচ'র উপর \perp ।

তাহা হইলে, $\therefore \text{কঘ} = \text{খঘ}, \therefore \triangle \text{কঘগ} = \triangle \text{খঘগ},$
ও $\triangle \text{কঘজ} = \triangle \text{খঘজ}।$

এবং সমান হইতে সমান বাহু দিলে,

$$\triangle \text{কজগ} = \triangle \text{খজগ}।$$

এবং সেইরূপে

$$\triangle \text{কজখ} = \triangle \text{খজগ}।$$

\therefore

$$\triangle \text{কজগ} = \triangle \text{কজখ}।$$

তাহা হইলে $\triangle কঙচ$ ও $\triangle জঙঘ$ হইতে

$\angle কচ = \angle জঘ$, এবং $কচ = জঘ$ (উঃ প্রঃ ১২) ।

কিন্তু $\angle কঘচ > \angle কচঘ$, $\therefore কচ > কঘ$,

$\therefore জঘ > কঘ$,

এবং $\therefore \angle ঘকঙ > \angle জকঙ > \angle কচ$ ।

টিপ্পনী । যদি এক সারিতে খ, ঘ, ঙ, চ, গতে কতকগুলি সমদূরস্থিত আলোকের স্তম্ভ থাকে, ক্রমে দণ্ডায়মান দর্শকের চক্ষুতে তাহারা ক্রমশঃ পরস্পরের নিকটবর্তী হইয়া আসিতেছে বলিয়া বোধ হয় । $\angle খকগ$ খঙগুলি ক্রমে ছোট হইয়া আনাই বোধ হয় তাহার কারণ ।

৭। একটি নির্দিষ্ট ঋজুবেধাতে এমন একটি বিন্দু নির্ণীত কর, বাহাতে সেই রেখার এক পার্শ্বস্থিত ছোট নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঋজুরেখা টানিলে তাহাদের সহিত প্রথমোক্ত রেখার কোণদ্বয় সমান হইবে ।

নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে কোন একটি, গ, হইতে নির্দিষ্ট $| কখ$ ’র উপর $গঙ \perp$ টান, $ঙচ = গঙ$ করিয়া লও, এবং অপর নির্দিষ্ট বিন্দু ঘ এবং চ যোগ কর । তাহা হইলে $ঘচ$ ও $কখ$ ’র সম্পাতবিন্দু জ ইষ্ট বিন্দু হইবে ।



কারণ, $\triangle গঙজ$ ও $\triangle চঙজ$ হইতে

$\angle গজঙ = \angle চজঙ$ (উঃ প্রঃ ১২)

$= \angle ঘজখ$ (উঃ প্রঃ ৩) ।

যদি $কখ$ তে আর কোন বিন্দু হ লওয়া যায়,

$গহ + ঘহ = চহ + ঘহ > ঘচ$ (উঃ প্রঃ ১১)

$> ঘজ + জচ$

$> ঘজ + গজ$ ।

অতএব গ ও ঘ হইতে জ’র দূরত্বের সমষ্টি লঘিষ্ঠ মান ।

৮। ত্রিভুজের ভূমি, তৎসংলগ্ন একটি কোণ, ও উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে । ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

মনে কর কখ নির্দিষ্ট ভূমি,
 \angle গ কোণ,
 | ঘ উচ্চতা ।



\angle খকঙ = \angle গ আক, কচ \perp কখ এবং = | ঘ টান, চজ ॥ কখ টান,
 এবং কঙ ও চজ'র সম্পাতবিন্দু জ হইতে জখ টান। তাহা হইলে স্পষ্ট
 দেখা যাইতেছে \triangle কখজ ইষ্ট \triangle হইবে।

টিপ্পনী। ইষ্ট ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ যখন = \angle গ হইবে, তখন ভূমির
 বিপরীত কোণ অবগতই। কঙ তে থাকিবে। এবং ত্রিভুজের উচ্চতা যখন = | ঘ হইবে,
 তখন ভূমির বিপরীত কোণ অবগতই। চজ'তে থাকিবে। অতএব ভূমির বিপরীত কোণ
 গণন কচ ও চজ উভয় রেখাতেই থাকিবে, তখন তাহা অবগতই ঐ বেখাঘরের সম্পাতবিন্দু
 হইবে।

কখ'র উপর \angle খকজ বিশিষ্ট যত ত্রিভুজ থাকিতে পারে তাহাদের
 ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দু নিয়তস্থান। কঙ। এবং কখ'র উপর। কচ
 পরিমাণ উচ্চতা বিশিষ্ট যত \triangle থাকিতে পারে তাহাদের ভূমির বিপরীত কোণ
 বিন্দু নিয়তস্থান। চজ।

অতরাং ইষ্ট ত্রিভুজের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দু অবগতই এই নিয়তস্থান
 রেখাঘরের সম্পাতবিন্দু।

এইরূপে নিয়তস্থান রেখাঘরের সম্পাত বিন্দু লইয়া অনেক সম্পাত
 প্রতিজ্ঞার সম্পাদন হইতে পারে।

৯। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা, ও একটি বাহ নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি
 অঙ্কিত কর।

মনে কর

ভূমি = কখ

উচ্চতা = ঘ

বাহ = ড।



কচ-কথ এবং = । ঘ টান, চজ ॥ কথ টান, এবং ককে কেন্দ্র ও
 ও কে ব্যাসার্ধ করিয়া ৩ আঁক । সেই ৩ এর ও । চজ'র ছেদ বিন্দু জ
 ত্রিভুজের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দু হইবে, এবং \triangle কজথ ইষ্ট \triangle হইবে ।

১০। যদি খঙ ও গঙ

\angle কথগ ও \angle কগঘ'র

সম্বন্ধকারী হয়,

তাহা হইলে \angle ও = $\frac{1}{2}$ \angle ক ।



$$\begin{aligned} \text{কারণ, } \angle \text{ ও} + \angle \text{ ওখগ} &= \angle \text{ ওগঘ (উ: প্র: ৮, অহ: ২)} \\ &= \frac{1}{2} \angle \text{ কগঘ} \\ &= \frac{1}{2} \angle \text{ ক} + \frac{1}{2} \angle \text{ কথগ} \\ &= \frac{1}{2} \angle \text{ ক} + \angle \text{ ওখগ} ; \end{aligned}$$

$$\therefore \angle \text{ ও} = \frac{1}{2} \angle \text{ ক} ।$$

১১। যে কোন ত্রিভুজ কথগতে যদি ঘ, থগ'র মধ্যবিন্দু হয়, তবে
 $\text{কথ}^2 + \text{কগ}^2 = ২\text{কঘ}^2 + ২\text{থঘ}^2$ ।

কারণ কঙ \perp থগ টানিলে,

দেখা বাইতেছে,

$$\text{কথ}^2 = \text{কঘ}^2 + \text{থঘ}^2 + ২\text{থঘ} \cdot \text{ঘঙ},$$

$$\text{কগ}^2 = \text{কঘ}^2 + \text{গঘ}^2 - ২\text{গঘ} \cdot \text{ঘঙ}$$

(উ: প্র: ২৩)



$$\text{এবং} \quad \text{গঘ} = \text{থঘ} ।$$

$$\therefore \text{কথ}^2 + \text{কগ}^2 = ২\text{কঘ}^2 + ২\text{থঘ}^2 ।$$

১২। যদি থগ (শেব চিত্র দেখ) ঘতে সম্বন্ধিত, ও ওতে বিবন
 দ্বিগুণ, বিভক্ত হয়,

$$\begin{aligned}
 \text{খঙ}^2 + \text{গঙ}^2 &= \text{খগ}^2 - ২\text{খঙ} \cdot \text{গঙ} \text{ (উঃ প্রঃ ২৪)} \\
 &= ৪\text{খঘ}^2 - ২\text{খঙ} \cdot \text{গঙ} \text{ (উঃ প্রঃ ২৪, অগ্রঃ ১)} \\
 &= ২\text{খঘ}^2 + ২\text{খঘ}^2 - ২\text{খঙ} \cdot \text{গঙ} \\
 &= ২\text{খঘ}^2 + ২\text{ঘঙ}^2 \text{ (উঃ প্রঃ ২৫)}।
 \end{aligned}$$

১৩। যে কোন ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর, তাহার শীর্ষকোণের সমবিখণ্ডকারী ও শীর্ষকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব এই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের বিস্তরণ।

মনে কর কখ, \angle খকগ'র সমবিখণ্ডকারী, ও $\text{কঙ} \perp \text{খগ}$ ।



তাহা হইলে \angle গ + \angle গকঙ = সম \angle

$$= \angle \text{খ} + \angle \text{খকঙ}।$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle \text{গ} - \angle \text{খ} &= \angle \text{খকঙ} - \angle \text{গকঙ} \\
 &= \angle \text{খকঘ} + \angle \text{ঘকঙ} - \angle \text{গকঙ} \\
 &= \angle \text{গকঘ} + \angle \text{ঘকঙ} - \angle \text{গকঙ} \\
 &= \angle \text{গকঙ} + \angle \text{ঘকঙ} + \angle \text{ঘকঙ} \\
 &\quad - \angle \text{গকঙ} \\
 &= ২\angle \text{ঘকঙ}।
 \end{aligned}$$

১৪। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও বাহুব অন্তর নির্দিষ্ট আছে। বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

মনে কর কঘঙচ ইষ্ট বর্গক্ষেত্র, এবং কখ তাহার কর্ণ ও বাহুব নির্দিষ্ট অন্তর।

খগ \perp কখ টান। তাহা হইলে, \therefore ঘঙ,

$$= \text{কঘ},$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle \text{গকঙ} &= \frac{১}{২} \text{ সম } \angle \\
 &= \angle \text{কগখ}।
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{খগ} = \text{কখ}।$$



আবার \therefore $\angle \text{উষ} = \angle \text{খ}$,

$\therefore \angle \text{উখঘ} = \angle \text{উষখ}$,

এবং $\angle \text{উঘক} = \text{সম } \angle = \angle \text{উখগ}$,

$\therefore \angle \text{গখঘ} = \angle \text{গঘখ}$,

এবং \therefore $\text{ঘগ} = \text{খগ} = \text{কখ}$ ।

অতএব ইষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু কঘ এইরূপে জানা যায় ।—

$\text{খগ} \perp \text{কখ}$ এবং কখ টান ।

কগ বোগ কর, এবং বর্দ্ধিত করিয়া $\text{গঘ} = \text{গখ}$ করিয়া লও ।

টিপ্পনী । এইরূপে সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা সম্পাদিত হইয়াছে মনে করিয়া কতদূর কি পাওয়া যায়, অর্থাৎ কোন্ কোন্ রেখার বা কোণের কাহার সহিত সাম্য পাওয়া যায়, তৎপ্রতি লক্ষ্য করিলে, অনেক স্থলে প্রতিজ্ঞা সম্পাদনের যথেষ্ট সহায়তা পাওয়া যায় ।

১৩ । একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও বাহুব সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে । ক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর ।

মনে কর কগঘঙ ইষ্ট বর্গক্ষেত্র, এবং কখ তাহার কর্ণ ও বাহুর সমষ্টি ।

তাহা হইলে

$\angle \text{খকগ} = \frac{1}{2} \text{ সম } \angle$,

$\angle \text{খ} = \frac{1}{2} \text{ সম } \angle$,

$\therefore \text{ঘখ} = \text{ঘগ}$, এবং $\angle \text{কঘগ} = \angle \text{খ} + \angle \text{খগঘ}$
 $= 2 \angle \text{খ}$ ।

অতএব এ প্রতিজ্ঞা এইরূপে সম্পাদিত হইতে পারে । যথা—

কতে $\angle \text{খকগ} = \frac{1}{2} \text{ সম } \angle$,

ও খতে $\angle \text{কখগ} = \frac{1}{2} \text{ সম } \angle$, অঙ্কিত কর ।

তাহা হইলে গ নিরীত হইবে ।

এবং $\text{গঘ} \perp \text{গক}$ টান, ও মনে কর

গঘ ও কখ ’র সম্পাত বিন্দু ঘ ।

তাহা হইলেই স্পষ্ট দেখা বাইতেছে $\text{কগ} = \text{গঘ} = \text{ইষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু}$ ।



অনুশীলনাথ উদাহরণমালা ।

৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৩ দ্রষ্টব্য ।

১। একটি ঋজুরেখার আব একটি ঋজুরেখার সহিত যে সন্নিহিত কোণদ্বয় হয়, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডকারিত্ব পরস্পরের উপর লব্ধ ।

২। দুই ঋজুবেখার পরস্পর সম্পাতে যে চারিটি কোণ হয় তাহাদের মধ্যে বিপরীত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকারিত্ব একই ঋজুবেখাতে থাকিবে ।

৩। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১এবং ২য় চিত্রে যদি \angle কওগ = 60° হয়, তবে \angle খওগ ও \angle গওঙতে কত কত ডিগ্রি আছে ?

৬ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৭ দ্রষ্টব্য ।

৪। যদি দুটি সম্পাতী ঋজুবেখার উপর আব একটি ঋজুরেখা পতিত হয়, তাহা হইলে তাহাৎ প্রত্যেক পার্শ্বেরই অন্তর্বর্ত্ত কোণদ্বয়ের সমষ্টি ও দুই সমকোণের প্রভেদ প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান ।

৫। যদি দুটি সমান্তর ঋজুবেখার উপর আর একটি ঋজুরেখা পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার প্রত্যেক পার্শ্বেরই বাহিরের কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান ।

৬। যদি দুটি ঋজুরেখা যথাক্রমে আব দুটি ঋজুবেখার সমান্তর হয়, এবং প্রথমোক্ত বেখাদ্বয়ের একটি দ্বিতীয়োক্ত রেখাদ্বয়ের একটিকে ছেদ কবে, তাহা হইলে রেখা চতুষ্টয়ের অপব দুটি পরস্পর ছেদ করিবে ।

৭ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৮ দ্রষ্টব্য ।

৭। ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহাদের প্রভেদ ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রভেদের সমান ।

৮। ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকারী রেখার অন্তর্গত বোণ ত্রিভুজের শীর্ষকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং শীর্ষকোণ অপেক্ষা তাহার আধিক্য ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক ।

২। সমানকোণী সমবাহু ত্রিভুজের কোণে কত ডিগ্রি আছে, এবং ঐরূপ বড় ত্রিভুজের কোণেই বা কত ডিগ্রি আছে ?

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১১ দ্রষ্টব্য ।)

১০। কেবল ৮ ও ৯ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সপ্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির উপর লম্ব ।

১১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তর ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজের যে ত্রিভুজ খণ্ড বিচ্ছিন্ন করে তাহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ।

১২। সমবাহু ত্রিভুজের যে কোন বাহুব সমান্তর ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজের যে ত্রিভুজখণ্ড বিচ্ছিন্ন করে তাহা সমবাহু ত্রিভুজ ।

১৩। যে কোন ত্রিভুজের কোন এক বাহুব সীমান্বয় হইতে ত্রিভুজের মধ্যে যে কোন বিন্দুতে যদি দুটি ঋজুরেখা টানা যায়, তাহা হইলে সেই রেখাদ্বয়ের সমষ্টি ত্রিভুজের অপব বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হইবে, কিন্তু তাহাদের অন্তর্গত কোণ ত্রিভুজের সেই বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বড় হইবে ।

১৪। যদি দুটি বহুভুজ যাহাদের কোন বিরূপ কোণ নাই, একটি ভূমির একই পার্শ্বে এমনভাবে থাকে যে একটি অপরটির সম্পূর্ণ অন্তর্গত, তাহা হইলে প্রথমটির বাহু সমষ্টি দ্বিতীয়টির বাহু সমষ্টি অপেক্ষা নূন হইবে ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১৫ দ্রষ্টব্য ।)

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজকে দুটি সর্বাংশে সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে ।

১৬। যদি দুটি ঋজুরেখা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডে বিভক্ত করে, তাহা হইলে তাহাদের সীমান্বিন্দু চতুষ্টয়ের যোগে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয় ।

১৭। ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা ভূমিকে যে দুই খণ্ডে বিভক্ত করে, তন্মধ্যে ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর সংলগ্ন খণ্ড অপর খণ্ড অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

১৮। যদি কোন জিভূজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্য্যন্ত তিনটি ঋজু রেখা টানা যায়, একটি ভূমির উপর লম্ব, দ্বিতীয়টি শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী, ও তৃতীয়টি ভূমির সমদ্বিখণ্ডকারী, তাহা হইলে তাহার উপরিউক্তক্রমে একটি অপেক্ষা অপরটি বৃহত্তর ।

১৯। যদি কোন জিভূজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে সে জিভূজটি সমদ্বিবাহ ।

২০। যদি কোন জিভূজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমিকে সমান দুইখণ্ডে বিভক্ত করে তাহা হইলে জিভূজটি সমদ্বিবাহ ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-১৭ দ্রষ্টব্য ।)

২১। আরতের কর্ণদ্বয় সমান ।

২২। যদি কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে সেই সামান্তরিক একটি আরতক্ষেত্র ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-২০ দ্রষ্টব্য ।)

২৩। একই ভূমির একই পার্শ্বে দুটি সমান সামান্তরিক থাকিলে তাহাবা একই সমান্তর রেখার অন্তর্গত ।

২৪। একই ভূমির উপর দুটি সমান সামান্তরিক থাকিলে তাহাদের উচ্চতা সমান হইবে ।

২৫। কোন সামান্তরিকের কর্ণের যে কোন বিন্দু দিয়া তাহার বাহুদ্বয়ের সমান্তর ঋজুরেখা টানিলে, সেই সামান্তরিক যে চারিটি সামান্তরিকে বিভক্ত হইবে, তন্মধ্যে যে দুটি কর্ণ দ্বারা বিভক্ত নহে তাহারা সমান হইবে ।

২৬। একটি সামান্তরিকের ভূমি ৩৬ ইঞ্চ ও ক্ষেত্রফল ৯ বর্গ ফিট । তাহার উচ্চতা কত ?

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-২৩ দ্রষ্টব্য ।)

২৭। সমদ্বিবাহ জিভূজের ভূমির উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার বাহ ও ততপরি ভূমির প্রক্ষেপণী এই দুই ঋজুরেখার অন্তর্গত আরতের দ্বিগুণ ।

২৮। যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ২০ ফিট হয়, তবে তাহার বিপরীত কোণ হইতে বাহুর উপর লম্বের পরিমাণ কত ?

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—২৬।

২৯। যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণেব সংলগ্ন কোন একটি বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার কর্ণ ও অপর বাহুর যোগফল ও বিবো-
গফলের অন্তর্গত আয়তের সমান।

৩০। যে কোন ঋজু রেখাংশের অন্তর্গত আয়ত তাহাদেব অর্দ্ধযোগফল ও অর্দ্ধবিবো-
গফলের উপবিস্তৃত বর্গক্ষেত্রাংশের প্রভেদেব সমান।

দ্বিতীয় অধ্যায় ।

বৃত্ত ।

প্রথম পরিচ্ছেদ ।

পরিভাষা ।

১। বৃত্তের পরিধির যে কোন ছই বিন্দুর মধ্যস্থিত অংশকে চাপ,
ও ঐ বিন্দুদ্বয়ের যোজককে তাহার জ্যা বলে ।

২। জ্যা বর্দ্ধিত করিলে তাহাকে ছেদিনী বা শান্তিনী বলে ।

৩। যদি কোন ছেদিনী ক্রমশঃ এইরূপে সরিয়া যায় যে, বৃত্তের সহিত
তাহাব ছেদ বিন্দুদ্বয় ক্রমাগত সন্নিহিত ও পরিশেষে মিলিত হয়,
তাহা হইলে ঐ শেষোক্ত স্থানে উপনীত ছেদিনীকে বৃত্তের
স্পর্শিনী বলে ।



অথবা, যদি কোন বিন্দু বেধা একটি বৃত্তের সহিত সংলগ্ন হয়, কিন্তু বর্দ্ধিত
করিলে তাহাকে ছেদ না করে, তাহা হইলে সেই রেখাকে সেই বৃত্তের
স্পর্শিনী বলে ।

৪। যদি পরস্পর ছেদকারী বৃত্তদ্বয়ের একটি এমনঃ এইরূপে সরিয়া
যায় যে তাহাদের ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমাগত সন্নিহিত ও পরিশেষে
মিলিত হয়, তাহা হইলে ঐ শেষোক্ত স্থানে উপনীত দ্বিতীয়
বৃত্ত প্রথম বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে বলা যায় ।



অথবা, যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরের সহিত মিলিত হয়, কিন্তু কেহ অপরকে
ছেদ না করে, তাহা হইলে তাহার পরস্পরকে স্পর্শ করিতেছে বলা যায় ।

৫। জ্যা ও তদ্বারা বিচ্ছিন্ন বৃত্তের পরিধির অংশদ্বয়েব যে কোন একটী নইয়া যে ক্ষেত্র হয় তাহাকে **হ্রস্বসংশ্লিষ্ট** বলে। এবং পরিধির অপর অংশকে প্রথমোক্ত অংশের **সংযোগী** চাপ বলে।

৬। কোন চাপের যে কোন বিন্দু হইতে তাহার সীমাবিন্দুদ্বয় পর্য্যন্ত দুটি স্বত্বরেখা টানিলে সেই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে **হ্রস্বসংশ্লিষ্ট** কোণ বলে, ও সেই কোণ সংযোগী চাপের উপর **সংশ্লিষ্ট** বলা যায়।

৭। চই ব্যাসার্দ্ধ ও তদ্ব্যবহিত পরিধিখণ্ড বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **হ্রস্ব-ক্ষেত্র** বলা যায়।

৮। যদি কোন স্বত্ববৈধিক ক্ষেত্রের কোণবিন্দুগুলি কোন বৃত্তের পরিধিতে থাকে, তাহা হইলে, সেই ক্ষেত্র, বৃত্তের **অন্তর্ভুক্ত**, ও সেই বৃত্ত, ক্ষেত্রের **বহির্ভুক্ত** বলা যায়।

৯। যদি কোন স্বত্ববৈধিক ক্ষেত্রের বাহুগুলি কোন বৃত্তকে স্পর্শ কবে, তাহা হইলে, সেই ক্ষেত্র, বৃত্তের **বহির্ভুক্ত**, ও সেই বৃত্ত, ক্ষেত্রের **অন্তর্ভুক্ত** বলা যায়।

টোলনী। প্রথম অধ্যায়ে বর্ণন বলা হইয়াছে এ অধ্যায়েও সেইরূপ, বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্র যাহাদের উল্লেখ হইবে, তৎ সমুদয়ই একই সমতল হিত বলিয়া মানিয়া লইতে চাইবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। জ্যা ও এক বিন্দু বিন্দু ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

১। যদি কোন বৃত্তের কেন্দ্রগামী ঋজু রেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী নহে এরূপ কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ড করে, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রেখা সেই জ্যার উপর লম্ব হইবে ।

২। পরিসৃতক্রমে, কেন্দ্র হইতে যে কোন জ্যার উপর লম্ব সেই জ্যাকে সমদ্বিখণ্ড করিবে ।



১। মনে কর কথ কেন্দ্রগামী নহে এরূপ জ্যা,
গ তাহার মধ্যবিন্দু, এবং কেন্দ্র ও হইতে ওগ টানা হইয়াছে।
তাহা হইলে ওগ \perp কথ ।

ওক, ওখ যোগ কর ।

তাহা হইলে Δ ওগক এবং Δ ওগখ এতে

কগ = খগ, ওগ উভয় Δ এতে আছে, এবং ওক = ওখ,

$\therefore \angle$ ওগক = \angle ওগখ (১, উঃ প্রঃ ১০) = সম \angle ।

এবং ওগ \perp কথ ।

২। মনে কর

ওগ \perp কথ,

তাহা হইলে

কগ = থগ।

কারণ,

$$গও^২ + গক^২ = ওক^২ = ওথ^২ = গও^২ + গথ^২,$$

$$\therefore গক^২ = গথ^২ \text{ এবং } \therefore গক = গথ।$$

অনুমান ১। বৃত্তের কেবল একমাত্র কেন্দ্র আছে, এবং তাহা যে কোন একটি জ্যার সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বের মধ্যবিন্দু, অথবা যে কোন দুইটি জ্যাব সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বদ্বয়ের সম্পাতবিন্দু।

কারণ, যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর

ও এবং ঘ উভয়ই ০ কথ'র কেন্দ্র।

ও এবং ঘ যোগ কর, এবং ওঘকে বর্জিত করিয়া

ও এবং চ'তে পবিষি পর্য্যন্ত টান।

তাহা হইলে, ওচ = ওও = ২ ওচ,

এবং ঘচ = ঘও = ২ ওচ,

$\therefore ওচ = ঘচ$, তাহা হইতে পারে না।

কেন্দ্র যখন ক এবং থ হইতে সমদূরবর্তী,

তখন তাহা অবশ্যই কথ'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বে, অর্থাৎ ঝাঞ'তে স্থিত, এবং যখন তাহা ঝা এবং ঞ্জ হইতে সমদূরবর্তী, তখন তাহা ঝাঞ'র মধ্যবিন্দু ও।

আবার, যখন কেন্দ্র, জ্যা কথ এবং জ্যা জহ উভয়েরই সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বে স্থিত, তখন তাহা অবশ্যই সেই লম্বদ্বয়ের সম্পাত বিন্দু।

অনুমান ২। বৃত্তের ব্যাস তাহার সমান্তর জ্যা শ্রেণির মধ্যবিন্দুর নিম্নত স্থান।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২ ।

১। দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যতগুলি ইচ্ছা ব্রহ্ম অঙ্কিত করা যাইতে পারে ।

২। এক রেখাঙ্কিত নহে এরূপ তিন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কেবল একটি মাত্র ব্রহ্ম অঙ্কিত হইতে পারে ।



১। মনে কর ক এবং খ দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু । (১ম চিত্র) ।

ক, খ দিয়া যত ইচ্ছা \odot আঁকা যাইতে পারে ।

কারণ, মনে কর গও, কখ'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব ।

তাহা হইলে, \therefore গও হিত বিন্দু ও, ও', ইত্যাদি, ক এবং খ হইতে সমদূরবর্তী,

\therefore ও, ও', ইত্যাদি, কেন্দ্র এবং ওক, ও'ক, ইত্যাদি, ব্যাসার্ধ লইয়া \odot আঁকিলে, তাহা ক এবং খ দিয়া যাইবে ।

২। মনে কর ক, খ, গ, তিন বিন্দু এক সরু রেখায় নহে ।

তাহা হইলে ক, খ, গ দিয়া কেবল একটিমাত্র \odot আঁকা যায় । (২য় চিত্র) ।

কারণ, মনে কর ঘও এবং ওও, কগ'এর এবং খগ'এর সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব । তাহা হইলে,

ঘও এবং ওও অবশ্যই মিলিবে, যে হেতুক

কগ'এক খগ' সমান্তর বা এক সরু রেখায় নহে ।

মনে কর ঘও এবং ওও, ও'তে মিলিত ।

তাহা হইলে ক, খ, গ দিয়া যে \odot যাইবে, ও তাহার কেন্দ্র ।

কারণ, $\triangle \text{ওকঘ}$ এবং $\triangle \text{ওগ'ঘ}$ হইতে $\text{ওক} = \text{ওগ'}$ (১, উঃ প্রঃ ১২),
এবং $\triangle \text{ওগ'ঙ}$ এবং $\triangle \text{ওখঙ}$ হইতে $\text{ওগ'} = \text{ওখ}$ ।

\therefore ওকে কেন্দ্র এবং ওককে ব্যাসার্ধ করিয়া \odot আঁকিলে
তাহা ক, খ, গ' দিয়া যাইবে ।

- এবং ক, খ, গ' দিয়া সেই একটি \odot ভিন্ন অঙ্ক কোন বৃত্ত যাইতে
পারে না ।

কারণ, ঘঙ এবং ওঙ, বাহাদেব উভয়েতেই

তরুণ \odot এর কেন্দ্র আছে,

কেবল একটি মাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে (স্বতঃ সিদ্ধ ১০) ।

অনুমান ১ । এক ঋজুরেখা হইতে তিন বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কিত
করা যায় না, অথবা, ঐ কথা অঙ্ক প্রকারে বলিতে গেলে, বৃত্ত, ঋজুরেখাকে
দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না ।

কারণ, ক, খ, গ' এক ঋজুরেখা হইলে

লব ঘঙ, ওঙ সমান্তর হইবে এবং মিলিবে না ।

অনুমান ২ । যদিও বৃত্ত ইচ্ছা বিভিন্ন বৃত্তে দুই সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে, কোন বৃত্তদ্বয়ের দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে না । অথবা, ঐ কথা অন্য প্রকারে বলিতে গেলে, এক বৃত্ত অপর বৃত্তকে দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না ।

যদি পারে, মনে কর ৩ কথগু ৩ কথগু কে
ক, থ, গ, এই তিন বিন্দুতে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে ক, থ, গ, এক বৃত্তেরখার থাকিতে পারে
না, তাহা এই মাত্র দর্শিত হইয়াছে । এবং এই বৃত্তদ্বয়ের



কেত্র অবজাই কথ এবং থগু'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বদ্বয়ের সম্পাত বিন্দু ও ।
ওক, ওঘ ও টান । তাহা হইলে ওক=ওঘ=ওঙ, বাহা হইতে পারে
না । কারণ, ওঘ < ওঙ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

১। যদি চারিটি বিন্দু একরূপে অবস্থিত হয় যে তাহাদের উপর দিয়া একটি হ্রস্ব অঙ্কিত হইতে পারে, তাহা হইলে তাহাদের যোগ করিয়া যে চতুর্ভুজ হয় তাহার বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

২। পরিব্রূত ক্রমে, যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক হয়, তাহা হইলে তাহার কোণবিন্দু চতুষ্টয় দিয়া একটি হ্রস্ব অঙ্কিত হইতে পারে।



১। মনে কর চারিটি বিন্দু ক, খ, গ, ঘ, একরূপে অবস্থিত যে তাহাদের উপর দিয়া একটি \odot অঙ্কিত হইতে পারে।

তাহা হইলে \angle কখঘ + \angle খগঘ = ২ সম \angle = \angle কখগ + \angle কঘগ।

মনে কর \odot কখগঘ'র কেন্দ্র ও। ওক, ওখ, ওগ, ওঘ যোগ কর। তাহা হইলে, \therefore ওক = ওখ = ওগ = ওঘ,

$\therefore \angle$ ওকখ = \angle ওখক (১, উঃ প্রঃ ২), \angle ওকঘ = \angle ওঘক।

\therefore যোগদ্বারা, \angle কখঘ = \angle ওখক + \angle ওঘক।

ঐরূপে, \angle খগঘ = \angle ওখগ + \angle ওঘগ।

\therefore যোগদ্বারা \angle কখঘ + \angle খগঘ = \angle কখগ + \angle কঘগ = ২ সম \angle

(১, উঃ প্রঃ ৮, অঙ্কঃ ৩)।

২। যদি $\angle কখঘ + \angle খগঘ = \angle কখগ + \angle কঘগ = ২$ সম \angle ,
তাহা হইলে ক, খ, গ, ঘ, দিয়া ০ অঙ্কিত হইতে পারে।

কারণ, মনে কর $কখ$, $খগ$ ’র সমাধিকণকারী লম্বদ্বয় $ও$ তে মিলিত।

তাহা হইলে $ওক = ওখ = ওগ$ । $ওঘ$ বোগ কর, এবং যদি সম্ভবপর হয়,
মনে কর, $ওঘ > ওক$, এবং $ওঙ = ওক$ ।

তাহা হইলে ক, খ, গ, ও দিয়া ০ অঙ্কিত হইতে পারে।

এবং : $\angle কখগ + \angle কঙগ = ২$ সম $\angle = \angle কখগ + \angle কঘগ$

(কল্পনাভুতাবে),

$\therefore \angle কঙগ = \angle কঘগ$ ।

কিন্তু $\angle কঙও > \angle কঘও$, এবং $\angle গঙও > \angle গঘও$

(১, উঃ প্রঃ ৮, অঙ্কঃ ২)।

: বোগ দ্বারা $\angle কঙগ > \angle কঘগ$ ।

অতএব $\angle কঙগ = \angle কঘগ$ । তাহা কখনই হইতে পারে না।

$\therefore ওঘ > ওক$ হইতে পারে না।

এবং ঐরূপে দর্শিত হইতে পারে,

$ওঘ < ওক$ হইতে পারে না।

অতএব $ওঘ = ওক$,

এবং ০ কখগ অবশ্যই ঘ দিয়া বাইবে।

টিপ্পনী (১)। যে যে স্থলে $ও$ চতুর্ভুজ কখগঘ’র বাহিরে বা কোন বাহুতে
অবস্থিত, ততৎ স্থলে এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করা বিভাচার্য্যর অনুশীলনার্থে রহিল।

টিপ্পনী (২)। চারিটি বিন্দু কেবল সেই স্থলে একপরিধিহ বন্ধার তাহাদের বোগে
যে চতুর্ভুজ হয় তাহার বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক।

অঙ্কন ১। সমবাহ সমানকোণী বহুভুজের কোণবিন্দু সকল একপরিধিহ।



উদাহরণ স্বরূপ একটি পঞ্চভুজ কখগঘঙ লওয়া যাউক।

\angle ঙকখ এবং \angle কখগ, কঙ এবং খঙ দ্বারা সমন্বিত কর, এবং তাহাদের মিলনবিন্দু ঙ, গ'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে \angle ঙকখ = $\frac{1}{2}$ \angle ঙকখ = $\frac{1}{2}$ \angle কখগ = \angle ঙখক।

\therefore ঙক = ঙখ।

আবার \triangle ঙখগ এবং \triangle ঙখক'তে, খগ = খক, ঙখ উভয়েতেই আছে, এবং \angle ঙখগ = \angle ঙখক। \therefore ঙগ = ঙক = ঙখ।

এবং \therefore \angle ঙগখ = \angle ঙখগ = $\frac{1}{2}$ \angle কখগ = $\frac{1}{2}$ \angle খগঘ,

অর্থাৎ ঙগ, \angle খগঘকে সমান হইখঙ করিতেছে।

এইরূপে দর্শিত হইতে পারে, ঙঘ = ঙগ, এবং \angle গঘঙ'র সমন্বিতকারী। ইত্যাদি।

অতএব ঙক = ঙখ = ঙগ = ঙঘ = ঙঙ,

এবং ঙকে কেন্দ্র আৰু ঙকে ব্যাসার্ধ কবিতা \odot আঁকিলে তাহা বহুভুজের বহিঃস্পর্শক হইবে।

অনুমান ২ । বসি ও হইতে ওচ, ওজ, ওহ প্রভৃতি বহু-
ভুজের বাহর উপব লগ টানা বার, তাহা হইলে তাহাদের পরবিন্দু, চ, জ, হ,
প্রভৃতি একপরিধি হইবে ।

কারণ ১ম অধ্যায়ের ৪ উদাহরণের প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ
হইবে যে,

$$\text{ওচ} = \text{ওজ} = \text{ওহ} = \text{ইত্যাদি} ।$$

অতএব ওকে কেন্দ্র এবং ওচকে ব্যাসার্ধ করিয়া ৩ অঙ্কিত করিলে
তাহা চ, জ, হ, প্রভৃতি বিন্দু দিয়া বাইবে । আর এই অধ্যায়ের ৭ উঃ প্রঃ
অনুসারে সেই ৩ বহুভুজের বাহুসকলকে স্পর্শ করিবে, এবং তাহার
অন্তরুক্ত হইবে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৪।

১। হ্রস্তের সমান সমান জ্যা। কেন্দ্রের সমদূরবর্তী।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, হ্রস্তকেন্দ্রের সমদূরবর্তী জ্যা পরস্পর সমান।



১। মনে কর কখ, গঘ, \odot কখগঘ'র সমান সমান জ্যা।

তাহা হইলে তাহারা কেন্দ্র ও হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ

যদি তাহাদের উপর ওঙ, ওচ \perp টানা যায়, ওঙ = ওচ।

ওক, ওগ যোগ কর।

তাহা হইলে কখ, এবং গঘ, ও এবং চ তে সমদ্বিখণ্ড হইরাছে

এবং $কঙ = \frac{১}{২}কখ = \frac{১}{২}গঘ = গচ$ । (২, উঃ প্রঃ ১)

আবার $ওঙ^২ + কঙ^২ = ওক^২ = ওগ^২ = ওচ^২ + গচ^২$,

কিন্তু $কঙ^২ = গচ^২$, $\therefore ওঙ^২ = ওচ^২$, এবং ওঙ = ওচ।

২। মনে কর $\text{ওঙ} = \text{ওচ}$,

তাহা হইলে $\text{কথ} = \text{গঘ}$ ।

কারণ, $\text{ওঙ}^২ + \text{কঙ}^২ = \text{ওক}^২ = \text{ওগ}^২ = \text{ওচ}^২ + \text{গচ}^২$,

এবং $\text{ওঙ}^২ = \text{ওচ}^২$,

$\therefore \text{কঙ}^২ = \text{গচ}^২$, এবং $\therefore \text{কঙ} = \text{গচ}$ ।

কিন্তু $\text{কথ} = ২\text{কঙ}$, $\text{গঘ} = ২\text{গচ}$ (২, উঃ প্রঃ ১),

$\therefore \text{কথ} = \text{গঘ}$ ।

অনুমান ১। কেন্দ্রের নিকটস্থ জ্যা কেন্দ্র হইতে দূরস্থ জ্যা অপেক্ষা বড়।

মনে কর $\text{ওঝ} \perp \text{জহ}$, এবং $\text{ওঝ} < \text{ওঙ}$ ।

তাহা হইলে $\text{জহ} > \text{কথ}$ ।

কারণ, $\text{ওঝ}^২ + \text{জঝ}^২ = \text{ওজ}^২ = \text{ওক}^২ = \text{ওঙ}^২ + \text{কঙ}^২$ ।

কিন্তু $\text{ওঝ}^২ < \text{ওঙ}^২$, $\therefore \text{জঝ}^২ > \text{কঙ}^২$,

$\therefore \text{জঝ} > \text{কঙ}$, এবং $\therefore \text{জহ} > \text{কথ}$ ।

অনুমান ২। বৃত্তের ব্যাস অর্থাৎ কেন্দ্রগামী জ্যা অপেক্ষা সকল জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তম।

মনে কর ঐওট একটি ব্যাস, জহ একটি জ্যা।

ওজ , ওহ বোগ কর।

তাহা হইলে $\text{ঐওট} = \text{ওঐ} + \text{ওট} = \text{ওজ} + \text{ওহ} > \text{জহ}$

(১, উঃ প্রঃ ১১)।

২। সমান বৃত্তে সমান কোণ ও সমান জ্যা ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৫ ।

সমান অথবা একই বৃত্তে,

১। যদি দুটি চাপ কেন্দ্রস্থ সমান কোণ-
বলের সম্মুখীন হয়, তবে তাহারা সমান ।

২। পরিস্রুত ক্রমে, যদি দুটি চাপ সমান
হয়, তবে তাহারা কেন্দ্রস্থ সমান কোণের
সম্মুখীন ।



১। মনে কর চাপ ক'গ'থ' এবং চাপ ক'গ'থ' দুই সমান ৩ এর
ও, ও' কেন্দ্রস্থ সমান \angle কওথ' এবং \angle ক'ও'থ' এর সম্মুখীন ।
তাহা হইলে চাপ ক'গ'থ' = চাপ ক'গ'থ' ।

৩ ক'গ'থ' কে ৩ ক'গ'থ' এর উপর একপে স্থাপিত কর যে,
ও, ও' এর উপর এবং ওক, ও'ক' এর উপর পড়ে ।

তাহা হইলে ক, ক' এর উপর পড়িবে, \therefore ওক = ও'ক' (\because বৃত্তস্থ সমান),
এবং ওথ, ও'থ' এর উপর পড়িবে, $\therefore \angle$ কওথ' = \angle ক'ও'থ',
এবং চাপ ক'গ'থ' চাপ ক'গ'থ' এর উপরে পড়িবে, \therefore বৃত্তস্থ সমান ।
 \therefore চাপ ক'গ'থ' = চাপ ক'গ'থ' (স্বতঃসিদ্ধ ২) ।

২। মনে কর চাপ ক'গ'খ' = চাপ ক'গ'খ' ।

তাহা হইলে \angle ক'গ'খ' = \angle ক'গ'খ' ।

৩। ক'গ'খ'কে ৩ ক'গ'খ' এর উপর এক্রপে স্থাপিত কর যে,
ও, ও'র উপর পড়ে, এবং ওক, ও'ক' এর উপর পড়ে ।

তাহা হইলে ক, ক' এর উপর পড়িবে, \therefore ওক = ও'ক' (\because বৃত্তের সমান),
এবং চাপ ক'গ'খ' চাপ ক'গ'খ' এর উপর পড়িবে, (\because বৃত্তের সমান),
এবং খ, খ' এর উপর পড়িবে, \therefore চাপ ও'খ'গ' = চাপ ও'খ'গ' ।
এবং ওখ, ও'খ' এর উপর পড়িবে, \therefore ও এবং খ, ও' এবং খ' এর
উপর পড়িয়াছে ।

\therefore \angle ক'গ'খ', \angle ক'গ'খ' এর উপর পড়িবে,
এবং \therefore \angle ক'গ'খ' = \angle ক'গ'খ' ।

যদি চাপের এবং কোণের একই বৃত্তে থাকে, তাহা হইলে ও এবং ও'
একটী বিন্দু, এবং সে স্থানে বৃত্তদ্বয়ের ক'গ'খ'কে বৃত্তদ্বয়ের ক'গ'খ' এর
উপর এক্রপে স্থাপিত করিতে হইবে যে ওক, ও'ক' এর উপর পড়ে ।
প্রমাণের অবশিষ্ট ভাগ উপরে প্রদর্শিত প্রকাবেই হইবে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৬।

সমান অথবা একই বৃত্তে,

- ১। সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপের সম্মুখীন।
- ২। পরিস্ফুটক্রেমে, সমান সমান চাপের জ্যা পরস্পর সমান।



- ১। মনে কর কখ , ক'খ' দুই সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যা।

তাহা হইলে চাপ কগ'খ' = চাপ ক'গ'খ' ।মনে কর ও , ও' বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র। ওক , ওখ , ও'ক' , ও'খ' যোগ কর।তাহা হইলে $\triangle \text{কওখ}$ এবং $\triangle \text{ক'ও'খ'}$ এতে $\text{ওক} = \text{ও'ক'}$, $\text{ওখ} = \text{ও'খ'}$, $\text{কখ} = \text{ক'খ'}$, $\therefore \angle \text{কওখ} = \angle \text{ক'ও'খ'}$ (১, উঃ প্রঃ ১৩),এবং \therefore চাপ কগ'খ' = চাপ ক'গ'খ' (২, উঃ প্রঃ ৫)।

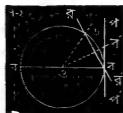
- ২। মনে কর চাপ ক'গ'থ = চাপ ক'গ'থ',
 তাহা হইলে জ্যা ক'থ = জ্যা ক'থ'।
 কারণ, \therefore চাপ ক'গ'থ = চাপ ক'গ'থ',
 $\therefore \angle$ ক'ও'থ = \angle ক'ও'থ' (২, উঃ প্রঃ ৫),
 এবং Δ ক'ও'থ এবং Δ ক'ও'থ' এতে
 $\text{ক'ও} = \text{ক'ও}'$ (\therefore বৃত্তদ্বয় সমান)
 $\text{থ'ও} = \text{থ'ও}'$,
 \therefore $\text{ক'থ} = \text{ক'থ}'$ (১, উঃ প্রঃ ১২)।

যদি জ্যাঘর এবং চাপঘর একই বৃত্তের হয়, তাহা হইলেও স্পষ্ট দেখা
 যাইতেছে উপরের প্রমাণ প্রণালী ঠিক থাকিবে।

৩। স্পর্শিনী ও পরস্পর স্পর্শী হস্ত ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

হস্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শিনী সেই বিন্দুগামী ব্যাসের লম্ব ।



মনে কর O নভব এর B বিন্দুতে BP তাহার স্পর্শিনী ।

তাহা হইলে $BP \perp$ ব্যাস BO ন ।

ছেদিনী BO ভবর' টান, ওভ যোগ কর,

এবং পবকে P' পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর ।

তাহা হইলে, \therefore ওভ = ওব, $\therefore \angle$ ওবভ = \angle ওভব ।

এবং ওবর' + \angle ওবভ = ২ সম \angle = \angle ওভর + \angle ওভব ।

$\therefore \angle$ ওবর' = \angle ওভর ।

যদি ভ ক্রমাগত B' র সন্নিহিত,

ও পরিশেষে তৎসহ মিলিত, হয়,

তাহা হইলে ছেদিনী BO ভবর', ক্রমাগত PO বপ' এর সন্নিহিত,

ও পরিশেষে তৎসহ মিলিত, হইবে,

এবং \angle বওভ অন্তর্হিত হইবে,

আর সমান কোণের ওভর, ওবর', সন্নিহিত কোণ হইবে,

এবং \angle ওবপ আর \angle ওবপ' এর সহিত মিলিত হইবে ।

$\therefore \angle$ ওবপ = \angle ওবপ' = সম \angle ।

অনুমান । স্পর্শিনী পবপ', ৩ স্পর্শ করে, কিন্তু ছেদ করে না ।

কারণ, যদি বপ তে যে কোন বিন্দু ব' লওয়া যায়,

এবং ওব' যোগ করা যায়,

তাহা হইলে, $\therefore \angle \text{ওবপ} = \text{সম } \angle$,

$\therefore \angle \text{ওবপ} > \angle \text{ওব'ব}$,

এবং $\therefore \text{ওব' } > \text{ওব} \text{ (১, উঃ প্রঃ ১০) } ।$

টিপ্পনী । এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা আর এক একারে প্রতীয়মান করা যাইতে পারে ।

যথা,—বৃত্তের সমান্তর জ্যা শ্রেণির মধ্যবিন্দুর নিম্নতস্থান তদুপরি লম্ব ব্যাস (২, উঃ প্রঃ ১, অঙ্কঃ ২) । এবং ঐ শ্রেণির কোন একটি জ্যা যেমন কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ সরিয়া যায় ও ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া আসে, (২, উঃ প্রঃ ৪, অঙ্কঃ ১) তাহার সীমাবিন্দুয় ক্রমশঃ সরিহিত ও পরিশেষে মিলিত হয়, এবং সেই শেষ স্থানে অবস্থিত জ্যা বর্দ্ধিত করিলে তাহাই উক্ত ব্যাসের সীমাবিন্দুস্থিত স্পর্শিনী হইবে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮।

হস্তের বাহিরের যে কোন বিন্দু হইতে হস্তের দুটি স্পর্শনী টানা যাইতে পারে, এবং তাহারা পরস্পর সমান, ও কেন্দ্রস্থ সমান কোণের সম্মুখীন।



মনে কর \odot ওখচ'র বাহিবে ক একটি বিন্দু।

তাহা হইলে ক হইতে ঐ \odot অব দুটি স্পর্শনী টানা যাইতে পারে,

এবং তাহারা সমান হইবে আর কেন্দ্র ও তে তাহাদের সম্মুখেব কোণের সমান হইবে।

প্রক যোগ কর, ও কে কেন্দ্র এবং ওক কে ব্যাসার্ধ করিয়া

\odot গকঘ আঁক। আর ওক এবং \odot ওখচ'র ছেদবিন্দু খ হইতে ওক'র উপর গখঘ লম্ব টান,

এবং তাহাকে \odot গকঘ পর্যন্ত গ, ঘ'তে বর্দ্ধিত করিয়া ওগ, ওঘ যোগ কর, আর তাহাদের সহিত \odot ওখচ'র ছেদবিন্দু ড, এবং চ, ক'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে $\therefore \triangle ওকড$ এবং $\triangle ওগখ$ এতে

ওক = ওগ, ওড = ওখ, এবং $\angle কওগ$ উভয়েতেই আছে,

$\therefore কড = গখ, \angle ওডক = \angle ওখগ = সম \angle$ ।

এবং কঙ, \odot ঙখচ'র স্পর্শিনী (২, উঃ প্রঃ ৭) ।

ঐ প্রকারে দেখা যাইবে,

কচ, \odot ঙখচ'র স্পর্শিনী, এবং = ঘখ ।

এবং গখ = ঘখ (২ উঃ প্রঃ ১),

\therefore কঙ = কচ ।

আবার, \triangle কঙঙ, \triangle কঙচ'তে,

ওঙ = ওচ, ওক উভয়েতেই আছে, এবং কঙ = কচ,

\therefore \angle কঙঙ = \angle কঙচ (১, উঃ প্রঃ ১৩) ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৯।

যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরে স্পর্শ করে, তাহারা কেবল এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, এবং তাহাদের কেন্দ্রের যোজক ঋজুরেখা সেই স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।



১ চিত্র

২ চিত্র

মনে কর \odot বক এবং \odot বখ, তাহাদের কেন্দ্র ও এবং ও',
ব তে স্পর্শ করিতেছে।

তাহা হইলে তাহারা অন্য কোন বিন্দুতে পবস্পব স্পর্শ করিবে না
এবং ওও', ব দিয়া যাইবে।

কারণ, \therefore এই বৃত্তদ্বয় কেবল দুই বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে,
(২, উঃ প্রঃ ২, অঙ্কঃ ২)

এবং সেই ছেদবিন্দুদ্বয় ব'তে মিলিত (২, পরিভাষা ৪),

\therefore এই বৃত্তদ্বয় আর অন্য কোন বিন্দুতে মিলিতে পারে না।

এবং \therefore এই বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের পরিণেবে মিলন বিন্দু ব হইতেছে,

\therefore তাহাদের সেই সাধারণ ছেদবিন্দুদ্বয়ের যোজক উভয়ের সাধারণ ছেদিনী,
ব তে তাহাদের উভয়ের সাধারণ স্পর্শিনীতে পরিণত হইবে।

\therefore ওব, ও'ব উভয়েই সেই সাধারণ স্পর্শিনী বপ'র লব হইবে,

(২, উঃ প্রঃ ৭)।

$\therefore \angle \text{ওবপ} = \text{সম } \angle = \angle \text{ও'বপ}।$

সুতরাং ওব এবং ও'ব মিলিত হইবে, বধা ১ম চিত্রে,

অথবা এক স্তম্ভরেখার থাকিবে, বধা ২য় চিত্রে।

(১, উঃ প্রঃ ২)।

৪। স্বত্বস্থিত কোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১০।

স্বত্বের কেন্দ্রস্থ কোণ একই চাপের উপর দৃষ্টমান পরিমিত কোণের দ্বিগুণ।



মনে কর \angle কওখ এবং \angle কগখ, \odot কগঘ'র

কেন্দ্র ও তে এবং \odot তে স্থিত এবং একই চাপ কখ তে দৃষ্টমান।

তাহা হইলে \angle কওখ $= 2 \times \angle$ কগখ।

গও বোগ কর এবং ঘ পর্বন্ত বর্ধিত কর।

তাহা হইলে \angle কওঘ $= \angle$ কগও $+$ \angle ওকগ (১, উঃ প্রঃ ৮, অঃ ১)
 $= 2\angle$ কগও ($\because \angle$ কগও $= \angle$ ওকগ)।

সেই কারণে, \angle খওঘ $= 2\angle$ খগও।

অতএব ১ ও ২ চিত্রে বোগ দ্বারা এবং ৩ চিত্রে বিরোগ দ্বারা,

\angle কওখ $= 2\angle$ কগখ।

অনুমান ১। একই বৃত্তখণ্ড কগগ'খ স্থিত

\angle কগখ এবং \angle কগ'খ সমান।

কারণ, উভয়েই \angle কওখ এর অর্ধেক।

অনুমান ২ । পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি $\angle কগখ = \angle কগ'খ$,
তাহা হইলে ক, গ, গ', খ একপরিধিস্থ ।

কারণ, যদি তাহা না হয়, মনে কর $\odot কখগ$, $কগ' কে ঙ$ 'তে
(ঙ চিত্রে দর্শিত হয় নাই) ছেদ করিয়াছে ।

তাহা হইলে, ঙঙ বোগ কবিলে,

$$\angle কঙখ = \angle কগখ = \angle কগ'খ ।$$

কিন্তু তাহা অসম্ভব (১, উঃ প্রঃ ৮, অঙ্কঃ ২), যদি ঙ ও গ' মিলিত না হয় ।

অনুমান ৩ । সমান সমান অথবা একই বৃত্তে,

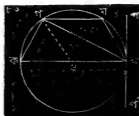
সমান সমান বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ পরস্পর সমান ।

কারণ, তাহারা সমান সমান চাপের উপর দণ্ডারমান, এবং সেই সেই
সমান চাপ যে কেন্দ্রেস্থ কোণের সম্মুখীন, তাহারা সমান (২, উঃ প্রঃ ৫) ।

আর সমান সমান বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ উক্ত সমান সমান কেন্দ্রেস্থ কোণের অর্ধেক,
সুতরাং তাহারাও অবশ্যই সমান ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

হুতাঙ্কিহ কোণ, সমকোণ। হুতাঙ্কি অপেক্ষা বড় হুতখণ্ডহ কোণ, সমকোণ অপেক্ষা ছোট। এবং হুতাঙ্কি অপেক্ষা ছোট হুতখণ্ডহ কোণ, সমকোণ অপেক্ষা বড়।



মনে কর, কগখ হুতাঙ্কি কওখ ব্যাস,
হুতখণ্ড থকগ হুতাঙ্কি অপেক্ষা বড়,
হুতখণ্ড থঘগ হুতাঙ্কি অপেক্ষা ছোট।

তাহা হইলে $\angle কগখ = সম\angle$,
 $\angle থকগ < সম\angle$,
 $\angle থঘগ > সম\angle$ ।

গও (ও কেন্দ্র) যোগ কর।

তাহা হইলে, $\angle ওক = \angle ওখ = \angle ওগ$,

$\therefore \angle ওগক = \angle ওকগ, \angle ওগখ = \angle ওখগ$ ।

\therefore বোলে, $\angle কগখ = \angle ওকগ + \angle ওখগ$ ।

কিন্তু $\angle কগখ + \angle ওকগ + \angle ওখগ = ২ সম\angle$ (১, উঃ প্রঃ ৮),

$\therefore \angle কগখ = \frac{১}{২} \times ২ সম\angle = সম\angle$ ।

সুতরাং $\angle থকগ < সম\angle$ ।

আবার $\angle থকগ + \angle থঘগ = ২ সম\angle$ (২, উঃ প্রঃ ৩),

এবং $\angle থকগ < সম\angle$,

$\angle থঘগ > সম\angle$ ।

অনুমান। যদি \angle গুথপ \odot কথঘগ কে স্পর্শ করে, এবং স্পর্শবিন্দু থ হইতে একটি অ্যা থগ টানা যায়, তাহা হইলে ঐ অ্যা স্পর্শিনীৰ সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে।

$$\text{কাৰণ, } \angle \text{গুথপ} + \angle \text{কথগ} = \text{সম } \angle$$

$$= \angle \text{থকগ} + \angle \text{কথগ},$$

$$\therefore \angle \text{গুথপ} = \angle \text{থকগ} \text{ (যাহা একান্তর বৃত্ত খণ্ডস্থ)}।$$

$$\text{আবার } \angle \text{গুথপ} + \angle \text{গুথপ}' = ২\text{সম } \angle (১, \text{উ: প্র: } ১)$$

$$= \angle \text{থকগ} + \angle \text{থঘগ}$$

$$(২, \text{উ: প্র: } ৩),$$

$$\text{এবং } \angle \text{গুথপ} = \angle \text{থকগ},$$

$$\therefore \angle \text{গুথপ}' = \angle \text{থঘগ}।$$

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা নিম্নলিখিত প্রকাৰেও প্রতীয়মান হইতে পারে।

$$\angle \text{কগথ} = \frac{১}{২} \angle \text{কওথ} (২, \text{উ: প্র: } ১০) = \frac{১}{২} \times ২\text{সম } \angle = \text{সম } \angle,$$

$$\angle \text{থকগ} = \frac{১}{২} \angle \text{থওগ} < \frac{১}{২} \times ২\text{সম } \angle < \text{সম } \angle,$$

$$\angle \text{থঘগ} = \frac{১}{২} \text{বিকল্প } \angle \text{গওথ} > \frac{১}{২} \times ২\text{সম } \angle > \text{সম } \angle।$$

৫। সম্প্রাপ্তী জ্যা ও ছেদিনী।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১২।

যদি দুটি জ্যা বৃত্তের অন্তরে বা বাহিরে পরস্পরকে ছেদ করে, একের ঋণোদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত অপরের ঋণোদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।



মনে কর বৃত্ত কগখ'র জ্যায় কখ, গঘ, ব তে

পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে কব খব = গব . ঘব।

কেন্দ্র ও হইতে কখ এবং গঘ'র উপর \perp ওঙ এবং ওচ টান,

এবং ওব, ওখ, ওঘ যোগ কর।

তাহা হইলে কখ এবং গঘ, ও, এবং চ তে সমদ্বিখণ্ড (২, উঃ প্রঃ ১),

এবং ব তে বিষম দ্বিখণ্ড হইরাছে,

\therefore কব খব = ওখ^২ এবং ওব^২ এর অন্তর (১, উঃ প্রঃ ২৫, ২৬)

= ওখ^২ + ওঙ^২ এবং ওব^২ + ওঙ^২ এর অন্তর

= ওখ^২ এবং ওব^২ এর অন্তর (১, উঃ প্রঃ ২১)

= ওঘ^২ এবং ওব^২ এর অন্তর (\because ওখ = ওঘ)

= ওচ^২ + চঘ^২ এবং ওচ^২ + চব^২ এর অন্তর

= চঘ^২ এবং চব^২ এর অন্তর

= গব . ঘব (১, উঃ প্রঃ ২৫, ২৬)।

অনুমান ১। যদি জ্যাম্বজ কৃত্তের বাহিরে ব'তে পরস্পরকে ছেদ
কবে, এবং ব হইতে স্পর্শিনী বপ টান্না যায়, তাহা হইলে

$$\text{বপ}^2 = \text{কব} \cdot \text{খব}।$$

$$\begin{aligned} \text{কারণ বপ}^2 &= \text{ওব}^2 - \text{ওপ}^2 \quad (১, \text{উ: প্র: } ২১) = \text{ওও}^2 + \text{ওব}^2 - \text{ওখ}^2 \\ &= \text{ওও}^2 + \text{ওখ}^2 + \text{কব} \cdot \text{খব} - \text{ওখ}^2 \quad (১, \text{উ: প্র: } ২৬) \\ &= \text{ওখ}^2 + \text{কব} \cdot \text{খব} - \text{ওখ}^2 = \text{কব} \cdot \text{খব}। \end{aligned}$$

এই কথা নিম্নলিখিত প্রকারেও সপ্রমাণ করা যাইতে পারে।

ছেদিনী বখক ক্রমশঃ সরিয়া যাইতে যাইতে, যখন ছেদ বিন্দুঘর, খ' এবং
ক, মিলিয়া যায়, তখন ছেদিনী বখক, স্পর্শিনী বপ'র স্থানে আইসে, এবং
ছেদিনীব খওঘর, বখ, বক, তখন বপ'ব সহিত মিলিয়া যায়। সুতরাং
 $\text{বক} \cdot \text{বখ} = \text{বপ} \cdot \text{বপ} = \text{বপ}^2।$

অনুমান ২। পরিসৃতক্রমে যদি বক · বখ = বপ^২ হয়,
তাহা হইলে বপ কৃত্তের স্পর্শিনী হইবে।

কারণ বপ' স্পর্শিনী টানিয়া, ওপ' বোগ করিলে,

$$\text{বপ}^2 = \text{কব} \cdot \text{খব} = \text{বপ}'^2, \therefore \text{বপ}' = \text{বপ}।$$

অতএব Δ ওবপ, Δ ওবপ' এতে,

$$\text{বপ} = \text{বপ}', \text{ওপ} = \text{ওপ}', \text{এবং ওব উভয়েতেই আছে,}$$

$$\therefore \angle \text{ওপব} = \angle \text{ওপ'ব} = \text{সম } \angle,$$

এবং \therefore বপ কৃত্ত গকপ'র স্পর্শিনী।

৬। বৃত্তের অন্তরঙ্কিত ও বহিরঙ্কিত
বহুভুজ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৭।

যদি কোন বৃত্তের পরিধি কতকগুলি সমান
ভাগে বিভক্ত করা যায়, এবং বিভাগ বিন্দু-
গুলি শঙ্কুরেখা দ্বারা যোগ করা যায়, তাহা
হইলে সেই ভাগ সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট সমবাহু
সমান কোণী বহুভুজ সেই বৃত্তে অন্তরঙ্কিত
হইবে ।



কাবণ, স্পষ্ট দেখা যাইতেছে,

বৃত্তের পরিধি বিন্দুগুলি ভাগে বিভক্ত হইয়াছে,
বহুভুজের ততগুলি বাহু থাকিবে ।

বহুভুজ সমবাহু হইবে,

কাবণ, তাহার বাহুগুলি সমান চাপের জ্যা (২, উঃ প্রঃ ৬) ।

এবং বহুভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে,

কাবণ, তাহার প্রত্যেক কোণই সমান চাপের বিশিষ্ট বৃত্ত খণ্ড ।

(২, উঃ প্রঃ ১০, অঙ্কঃ ৩) ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৪ ।

যদি কোন হস্তের পরিধি কতকগুলি সমানভাগে বিভক্ত হয়, এবং প্রত্যেক বিভাগ বিন্দুতে এক একটি স্পর্শিনী টানা যায়, তাহা হইলে সেই ভাগসংখ্যক বাহুযুক্ত একটি সমবাহু সমানকোণী বহুভুজ সেই হস্তে বহিঃস্থিত হইবে ।



স্পষ্ট দেখা যাইতেছে পরিধির ভাগ সংখ্যা বত,

বহুভুজের ততগুলি বাহু থাকিবে ।

এবং বহুভুজটি সমবাহু ও সমানকোণী হইবে,

কাবণ, বৃত্ত কেন্দ্র ও পর পর তিনটি স্পর্শবিন্দু ক, গ, ঙ'র সহিত
এবং বহুভুজের দুটি তন্মধ্যস্থিত কোণ বিন্দু খ, ঘ'র সহিত যোগ করিলে,
দেখা যাইবে, \therefore স্পর্শিনী $\text{খক} = \text{স্পর্শিনী খগ}$ (২, উঃ প্রঃ ৮),

$$\text{ওক} = \text{ওগ},$$

এবং $\angle \text{ওকখ} = \angle \text{ওগখ}$ (\therefore প্রত্যেকেই সম \angle)

$\therefore \Delta \text{ওকখ} = \Delta \text{ওগখ}$ সর্বাংশে (১, উঃ প্রঃ ১২),

এবং $\angle \text{ওখক} = \angle \text{ওখগ},$

$$\angle \text{কওখ} = \angle \text{গওখ}।$$

অর্থাৎ $\angle \text{কখগ} = ২ \angle \text{ওখগ},$

$$\angle \text{গওখ} = ২ \angle \text{গওক}।$$

এবং সেই কারণে $\triangle গুণ্ডষ = \triangle গুণ্ডষ$ সর্বাংশে,

এবং $\angle গুণ্ডক = ২\angle গুণ্ড$,

$\angle গুণ্ড = ২\angle গুণ্ডগ$ ।

কিন্তু $\angle গুণ্ডক = \angle গুণ্ড$ (\because চাপ কগ = চাপ গুগ),

$\therefore \angle গুণ্ড = \angle গুণ্ড$ ।

এবং $\angle গুণ্ড = \angle গুণ্ড$ (\because উভয়েই সম \angle),

আর বাহু গুগ $\triangle গুণ্ড$, $\triangle গুণ্ড$ উভয়েতেই আছে,

\therefore $গুগ = গুগ$,

$\angle গুণ্ড = \angle গুণ্ড$ ।

অতএব $গুগ = ২ গুগ$ ।

সুতরাং দেখা যাইতেছে, এই বহুবুজের

বাহুগুলি সমান সমান স্পর্শিতীর বিস্তৃণ,

এবং কোণগুলি সমান সমান কোণের বিস্তৃণ ।

অর্থাৎ ইহা সমবাহু ও সমানকোণ বিশিষ্ট ।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। হস্তের কেন্দ্র নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

যে কোন নির্দিষ্ট হস্ত বা চাপের কেন্দ্র নির্ণয় কর ।



মনে কর কখগ ঘ নির্দিষ্ট হস্ত বা চাপ ।

তাহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে ।

হস্ত পরিধিতে বা চাপে যে কোন বিন্দু খ লইয়া,

কখ, খগ বোগ কর, কখকে ঘতে, খগকে গতে

সম্মিথগে ভাগ কর, এবং ঘগ, গগ, কখ, খগ টান ।

ঘগ এবং গগ'র সম্পাতবিন্দু ও ইষ্ট কেন্দ্র হইবে ।

কারণ, \therefore কেন্দ্র, ক এবং খ'র সমদূরবর্তী,

\therefore তাহা ঘগতে হিত (১, স: প্র: ৬, অঙ্ক: ১) ।

এবং সেই কারণে তাহা গগতে হিত ।

\therefore তাহা ঘগ এবং গগ'র সম্পাতবিন্দু ও ।

২। বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত কর।



মনে কর ব বিন্দু হইতে কখগ বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত করিতে হইবে।

বৃত্তের কেন্দ্র ও নির্ণয় করিয়া ওব যোগ কর।

ব যদি ০ তে থাকে বপ \perp ওব টান।

বপ বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে (২, উঃ প্রঃ ৭)।

ব যদি ০ এর বাহিবে থাকে, ওব'ব মধ্যবিন্দু ঘ নির্ণয় কর,

ঘকে কেন্দ্র, ওঘকে ব্যাসার্ধ, করিয়া ০ ওপবপ' অঙ্কিত কর,

এবং বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু প, প' কে ব'ব সহিত যোগ কর।

বপ, বপ' ০ কখগ'র স্পর্শিনী হইবে।

কারণ, ওপ, ওপ' যোগ করিলে দেখা যায়,

\therefore ওপব এবং ওপ'ব উভয়ই অর্ধবৃত্ত,

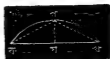
$\therefore \angle$ ওপব এবং \angle ওপ'ব উভয়ই সম \angle (২, উঃ প্রঃ ১১),

এবং বপ, বপ' উভয়ই ০ কখগ'র স্পর্শিনী (২, উঃ প্রঃ ৭)।

৪। চাপ সমদ্বিখণ্ড করণ।

সম্পাদা প্রতিজ্ঞা—৪।

একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমান দুইখণ্ড কর।



মনে কর চাপ কগখকে সমান দুইখণ্ড করিতে হইবে।

কখ যোগ কর, তাহার মধ্যবিন্দু ঘ নির্ণয় কর,

এবং কখ'র উপর \perp ঘগ টান।

ঘগ এবং চাপ কগখ'র ছেদবিন্দু ঘ

কগখ'র মধ্যবিন্দু।

কারণ, কঘ=খঘ, গঘ উভয় Δ কঘগ, Δ খঘগতে আছে, এবং

$$\angle কঘগ = সম \angle = \angle খঘগ,$$

$\therefore \Delta কঘগ$ এবং $\Delta খঘগ$ হইতে,

$$কগ = খগ \text{ (১, উ: প্র: ১২),}$$

এবং \therefore চাপ কগ = চাপ খগ (২, উ: প্র: ৬)।

টিপ্পনী ২ । দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বহুগুলি ইচ্ছা বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় (২, উঃ প্রঃ ২) ।
 হুতরাং ক, খ, বিন্দুদ্বয়দ্বারা বৃত্ত অঙ্কননিয়মও রক্ষা করিতে পারে । এই প্রতিজ্ঞায় অল্প
 একটি নিয়ম, অর্থাৎ নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের কোন কেন্দ্র থাকে, রক্ষা করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে
 হইরাছে । ইহার পরবর্তী প্রতিজ্ঞাতেও অল্প একটি নিয়ম, অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের
 স্পর্শ করা, রক্ষা করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬ ।

একরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, বাহ্য দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বাইবে, এবং একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখাকে স্পর্শ করিবে ।



মনে কর একরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে,

বাহ্য ক, খ, দিয়া বাইবে এবং । গঘ কে স্পর্শ করিবে ।

প্রথমতঃ মনে কর কখ এবং গঘ, ও তে মিলিত ।

ওপ একরূপে নির্ণয় কর যে, $ওপ^2 = কও \cdot ওখ$ (১, সঃ প্রঃ ১১),

এবং ক, খ, প, দিয়া O আঁক (২, উঃ প্রঃ ২, অনুসারে) ।

সেই বৃত্ত গঘ কে স্পর্শ করিবে,

$\therefore ওপ^2 = কও \cdot ওখ$ (২, উঃ প্রঃ ১২, অহঃ ২) ।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর কখ ॥ গঘ ।

কখ কে ও তে সমদ্বিখণ্ড করিয়া ওপ \perp গঘ টান,

খপ বোগ কর, এবং $\angle পখও = \angle খপও$ অঙ্কিত কর ।

মনে কর ওপ এবং খও'র সম্মাতি বিন্দু ও ।

তাহা হইলে ইষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র ও, এবং ব্যাসার্ধ ওপ হইবে ।

কারণ, ও কে কেন্দ্র এবং ওপ কে ব্যাসার্ধ করিয়া

○ আঁকিলে তাহা ক, খ দিয়া বাইবে, $\therefore ওক = ওখ = ওপ$,

এবং গঘ কে স্পর্শ করিবে, $\therefore ওপ \perp$ গঘ ।

টিপ্পনী । যদি কখ এবং গঘ'র সম্মাতিবিন্দু ক এক খ'র মধ্যে পড়ে, তবে এই প্রতিজ্ঞা সম্পাদন অসাধ্য ।

৬। বৃত্তের অন্তরে ও বাহিরে ঋজুর্নৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৭।

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তরে ও বাহিরে সম-বাহু সমানকোণী ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, এবং ষড়্ভুজ অঙ্কিত কর।



১। সমবাহু সমানকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ।

এ স্থলে \bigcirc অর্ধাংশ কেন্দ্রস্থ ৪ সম \angle সমান ৩ ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া (১, সং: প্রঃ ১) তাহাৰ এক বাহু উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর। ওক ব্যাসার্দ্ধ টান।

এবং \angle কওথ = সমবাহু \triangle এর বাহিৰেব $\angle = \angle$ কওগু অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, \angle কওথ = \angle কওগু = \angle খওগু,

\therefore চাপ কথ = চাপ কগু = চাপ খগু।

$\therefore \triangle$ কথগু সমবাহু সমানকোণী ত্রিভুজ (২, উঃ প্রঃ ১৩)।

২। ঐ রূপ চতুর্ভুজ আঁকিতে হইলে,

\bigcirc সমান ৪ ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

যে কোন একটি ব্যাস টান এবং তত্পর \perp আব একটি ব্যাস টান।

তাহাব কেন্দ্রে ৪টি সম \angle উৎপন্ন করিবে ও সেই সম \angle ৪টি

সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান হইবে।

অতএব তাহাদের সীমাবিন্দু যোজক চতুর্ভুজ

ষ্ট চতুর্ভুজ নির্মাণ করিবে (২, উঃ প্রঃ ১৩)।

৩। ঐকপ পঞ্চভুজ আঁকিতে হইলে,

○ সমান ৫ ভাগে ভাগ করিতে হইবে ।

ঐকপ একটি সমবাহু \triangle অঙ্কিত কর বাহার ভূমিসংলগ্ন \angle বর
প্রত্যেকে তাহার শীর্ষ কোণের দ্বিগুণ (১, সঃ প্রঃ ১২) ।

তাহা হইলে তাহার

$$\text{ভূমিসংলগ্ন } \angle = \frac{1}{2} \text{ সম } \angle = \frac{1}{2} \times 8 \text{ সম } \angle ।$$

কেন্দ্র ও তে \triangle এর ভূমিসংলগ্ন \angle এর সমান ৫টি কোণ অঙ্কিত কর,
তাহা হইলে ○ সমান ৫ ভাগে বিভক্ত হইবে, এবং সেই বিভাগবিন্দু
যোগ করিলে ইষ্ট পঞ্চভুজ পাওয়া যাইবে (২, উঃ প্রঃ ১৩) ।

৪। ঐকপ ষড়্ভুজ আঁকিতে হইলে, ১ম চিত্রের কেন্দ্রস্থ \angle ৩টি সমান
দ্বিখণ্ড করিলেই,

○'র ছেদবিন্দু ৬টি পাওয়া যাইবে, ১

এবং তাহাদেব যোগযাবা ইষ্ট ষড়্ভুজ অঙ্কিত হইবে ।

৫। তিন, চারি, পাঁচ, ছয়, বাহুবিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্র বৃত্তে
বহিরঙ্কিত কবিত্তে হইলে, ○ কে উপবে দর্শিত প্রণালীতে সমান ভাগে
ভাগ করিয়া ভাগবিন্দুতে স্পর্শিনী টানিলে, ইষ্টক্ষেত্র পাওয়া যাইবে ।

(২, উঃ প্রঃ ১৪) ।

৭। বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



বৃত্ত বেটন করিয়া ন সংখ্যক বাহ্যবিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী
একটি বহুভুজ অঙ্কিত কর।

কেন্দ্র হইতে তাহার কোণ বিন্দুসমূহ পর্য্যন্ত | টানিয়া

বহুভুজকে ন সংখ্যক সমান Δ এ বিভক্ত কর।

মনে কর ব্যাসার্ধ = ব, পরিধি = গ, বহুভুজের বাহু = অ।

তাহা হইলে তাহার পরিমিতি বা বাহুসমষ্টি = নঅ।

প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ অব (১, উঃ প্রঃ ২০, টিঃ ২),

বহুভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ অব \times ন = $\frac{1}{2}$ র \times নঅ

= $\frac{1}{2}$ র \times বহুভুজের পরিমিতি।

এখন যদি ন কে অসীমরূপে বৃদ্ধি করা যায়, তাহা হইলে

বহুভুজের পরিমিতি = গ।

\therefore বহুভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ রগ,

এবং \therefore বৃত্তের ক্ষেত্রফল = বহুভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ রগ।

বৃত্তের আকার সোঁটব দুট্টে অনুমান করা যায়

গঃ এই অনুপাত সকল বৃত্তেই সমান (পরবর্তী ৩, সঃ প্রঃ ৬, টিঃ ২ দ্রষ্টব্য)।

বিজ্ঞার্থী পবে জানিবেন $g=২$ ঘর,

স্বতরাং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$,

এবং $\pi = ৩.১৪১৫৯২৬৫$.

বিজ্ঞার্থী পবে জানিবেন π কোন সসীম অঙ্কদ্বারা প্রকাশযোগ্য বা পরিমের্য
নহে, তবে তাহার মূল্যের বৃত্তদুই সন্নিহিত অঙ্ক পাইতে ইচ্ছা করা যায় তাহা
পাওয়া যায় (পরবর্তী ৩, সঃ প্রঃ ৬ দ্রষ্টব্য)।

সহজেই দেখা যাইতেছে $\pi > ৩ < ৩.১৪$ ।

কারণ $g >$ অন্তর্বদ্ধিত সমবাহ সমানকোণী বৃত্ত দুজের পরিমিতি > ৬ র,

এবং $g <$ বহিবদ্ধিত . . . < ৬ ওখ
(২য় চিত্র)।

আব $ওক^২ = ওখ^২ - \frac{১}{৪}$ ওখ^২ $= \frac{৩}{৪}$ ওখ^২ ।

$\therefore ওক = \frac{\sqrt{৩}}{২}$ ওখ,

এবং $\therefore ওখ = \sqrt{৩} \cdot ওক = \sqrt{৩} \cdot \frac{\sqrt{৩}}{২} = \frac{৩}{২}$ ব।

$\therefore ৬ ওখ = ৪ \sqrt{৩} \cdot ব = ৬.৯২ \times ব।$

$\therefore g < ৬.৯২ \times ব$

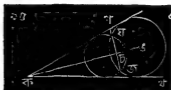
এবং $\pi = g \div ২ব > ৩ < ৩.১৪$ ।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।

অনুশীলনार्थ উদাহরণ ।

উপপন্ন বা সম্পাদিত উদাহরণ।

১। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর বাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং দুইটি নির্দিষ্ট ক্ষুদ্রেরাধাকে স্পর্শ করিবে।



মনে কর কখ, কগ নির্দিষ্ট হাইট ঃ রেঃ, এবং ঘ, নির্দিষ্ট বিন্দু।

তাহা হইলে : ৩, কখ, কগ স্পর্শ করিবে,

∴ তাহাব কেন্দ্র \angle থকগ'র সম দ্বিখণ্ডকারী কণ্ডতে থাকিবে (১, সঃ প্রঃ ৩, অমুঃ)

যচ + কঙ টান এবং চজ = চষ করিয়া লও।

তাহা হইলে ইষ্ট ০ জু মিয়া যাইবে,

∴ তাহার কেন্দ্র কণ্ডিতে এবং তাহা ঘ ঘ দিগা ঘাইবে।

অতএব প্রহি প্রতিজ্ঞা এই আকারে পরিবর্তিত হইল,

যথা,—একরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর বাহ্য ছুইটি বিন্দু ঘু এবং জু দিয়া যাইবে এবং একটি গুজুরেখা কখ বা কগকে স্পর্শ করিবে (কারণ একটিকে স্পর্শ করিলে অপরটিকে অবগতই স্পর্শ করিবে) । এই শেখোক্ত প্রতিকল্প

এই অধ্যায়ের ৬ সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা। প্রতিজ্ঞাটি সপ্রমাণ করিবার তার বিদ্যার্থীর উপর রহিল।

যে স্থলে নির্দিষ্ট ঋতুরেখার সমান্তর লে স্থলের প্রতিজ্ঞা সম্পাদনের ভারও বিজ্ঞার্থীর উপর রহিল। মনে রাখিতে হইবে, শেবোক্ত স্থলে নির্দিষ্ট বিন্দু রেখার বাহিরে থাকিলে প্রতিজ্ঞা সম্পাদন সাধ্য নহে।

২। এরূপ একটি বৃত্ত আঁকিত কর যাহা হাইট নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

মনে কব ক, খ নির্দিষ্ট বিদ্ধ, গঘঙ নির্দিষ্ট ০।

০ গঘঙ তে যে কোন বিন্দু গ লইয়া, গ, খ, ক, দিয়া একটি ০ আঁক (২, উ: প্র: ২ জট্টা), এবং মনে কর ঐ ০ এবং ০ গঘঙ'র ছেনবিন্দু গ এবং ঙ। কখ এবং গঙ কে



বর্জিত কবিতা চ তে মিলাও, চ হইতে ৩ গণ্ড'র স্পর্শনী চষটান,
এবং ক, খ, ঘ, দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব। তাহাই ইষ্ট বৃত্ত হইবে।

কারণ, কচ · চখ = গচ চঙ = চঘ² (২, উ: প্র: ১২),

∴ চম্ব, ০ কথম্ব কে স্পর্শ করিতেছে।

এবং \therefore চ্য, \odot কথষ কে স্পর্শ করিতেছে,

∴ ○ কথষ এবং ○ গঘঙ উভয়েরই ষ ভে

সাধারণ স্পর্শিনী চষ হইতেছে.

এবং ∴ ঐ ০ হয় যি তে পরস্পরকে স্পর্শ করিতেছে (২. উঃ প্রঃ ২)।

৩। নির্দিষ্ট ভূমি, উচ্চতা, এবং শীর্ষকোণদিষ্ট একটি ত্রিভুজ নির্মাণ কর।

নির্দিষ্ট ভূমি কথ'র উপর

এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড কচখ

অঙ্কিত কর বাহাতে স্থিত ৮

= निर्दिष्ट \angle ग (२, स: प्र: ७)।

কঙ + কথ এবং = নির্দিষ্ট উচ্চতা য় টান, এবং ওচ ॥ কথ টান ।

তাহা হইলে $\angle C$ এবং $\angle B$ কক্ষের ছেদবিন্দু C ইষ্ট Δ এর শীর্ষবিন্দু হইবে, এবং $\angle C$ ইষ্ট ত্রিভুজ হইবে।



∴ ইষ্ট Δ এর শীর্ষ $\angle = \angle$ গ,

∴ Δ এর শীর্ষবিন্দু অবশ্যই বৃত্তখণ্ড কচখ তে থাকিবে।

এবং ∴ ইষ্ট Δ এর উচ্চতা | ঘ = কঙ,

∴ ইষ্ট Δ এর শীর্ষবিন্দু অবশ্যই | ওচ তে থাকিবে।

∴ তাহা অবশ্যই কচখ এবং ওচ'ব ছেদবিন্দু চ।

৪। নির্দিষ্ট ভূমি, নির্দিষ্ট শীর্ষ কোণ, এবং নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়সমষ্টিবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কব।

নির্দিষ্ট ভূমি কখ'ব উপর

একদপ একটি বৃত্তখণ্ড আঁক

যাহাতে স্থিত $\angle =$

নির্দিষ্ট শীর্ষকোণের

অর্ধেক।



খ' কে কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমষ্টিকে ব্যাসার্ধ

করিয়া একটি \odot আঁক। বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু

গ' কে ক এবং খ'র সহিত যোগ কব। এবং \angle পকঘ = \angle কগঘ

অঙ্কিত কব। তাহা হইলে Δ কঘখ ইষ্ট Δ হইবে।

কারণ, তাহার ভূমি কখ, তাহার শীর্ষকোণ কঘখ

= \angle কগখ + \angle ঘকগ = $2 \angle$ কগখ = নির্দিষ্ট \angle ,

এবং তাহার বাহুদ্বয় = কঘ + ঘখ = গঘ + ঘখ

(∴ \angle ঘগক = \angle ঘকগ, এবং ∴ কঘ = গঘ)

= খগ = নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়সমষ্টি।

৩। নির্দিষ্ট ভূমি, নির্দিষ্ট শীর্ষকোণ, এবং নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তর্বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কব।

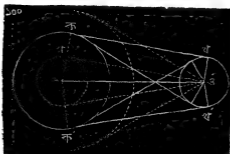
নির্দিষ্ট ভূমি কখ'ব উপর
এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড কগখ
অঙ্কিত কব যাহাতে স্থিত
কোণ = \angle ঘঙহ অর্থাৎ
= নির্দিষ্ট শীর্ষ \angle ঘঙচ



+ তাহার পবিত্রক কোণেব অর্ধেক। ক কে কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তর্ব কগ কে ব্যাসার্দ্ধ কবিয়া ০ ঙাঁক।

বৃত্তবরেব ছেদবিন্দু গ কে ক এবং খ'ব সন্নিহিত যোগ কব।
এবং \angle গখবা - \angle খগবা অঙ্কিত কব। তাহা হইলে
 Δ কখবা ইষ্ট Δ হইবে। তাহা সপ্রমাণ করাব তাব
বিজ্ঞার্থীৰ উপব বহিল।

৬। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সাধারণ স্পর্শিনী টান।



মনে কর \odot , \odot' বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

\odot কে কেন্দ্র এবং বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরকে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া \odot অঙ্কিত কর, \odot' হইতে তাহার স্পর্শিনী \odot' গ টান, \odot গ যোগ কর এবং বর্দ্ধিত করিয়া নির্দিষ্ট \odot এর সহিত $ক$ তে মিলিত কর। $\odot'খ \perp \odot'গ$ টান, এবং $খক$ যোগ কর। $খক$ নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ স্পর্শিনী হইবে।

কারণ, $গক = \odot'খ$ এবং $\parallel \odot'খ$ ($\because \odot'গ = \odot'ক - \odot'খ$, এবং $\odot'গ, \odot'খ \perp \odot'গ$),

\therefore $খক = \odot'গ$ এবং $\parallel \odot'গ$ (১, উঃ প্রঃ ১৭, অহ ১),
এবং $\angle \odot'গ\odot' =$ সম \angle ,

$\therefore \angle \odot'কখ =$ সম \angle (১, উঃ প্রঃ ৬)।

আবাব, \therefore কখও'গ একটি সামান্তরিক,

$\therefore \angle ও'খক = \angle কগও' = সম \angle$ ।

\therefore কখ উভয় \bigcirc এর স্পর্শিনী ।

বিজ্ঞার্থী দেখিবেন, খ'ক' উভয় \bigcirc এর আর একটি স্পর্শিনী ।

ওকে কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টিকে ব্যাসার্ধ কবিয়া \bigcirc অঙ্কিত কবিয়া ও' হইতে সেই \bigcirc এর স্পর্শিনী টানিয়া, উপরেব দর্শিত প্রণালী অবলম্বনে নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের আর চইটি সাধারণ স্পর্শিনী টানা যার ।

৭। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে যত ত্রিভুজ অন্তর্ভুক্ত করা যাইতে পারে তন্মধ্যে সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম ।



মনে কর $\triangle কখগ$ বৃত্তের অন্তর্ভুক্ত সমবাহু \triangle ,
এবং (চিত্রে প্রদর্শিত নহে) $\triangle ক'খ'গ'$ অন্তর্ভুক্ত বিষমবাহু \triangle ।

$\triangle ক'খ'গ'$ কে \odot মধ্যে সবাইরা $ক'$ কে $ক'$ ব উপর
স্থাপিত করিয়া $\triangle ক'খ'গ'$ এইরূপে স্থাপিত করা যাইতে পারে ।

যদি $গ'$, চাপ $কগ'খ'$ এর মধ্যবিন্দু না হয়,
এবং $গ''$ যদি তাহার মধ্য বিন্দু হয়, তাহা হইলে
সহজেই সপ্রমাণ করা যায় যে

$$\triangle কগ'খ' > \triangle কগ'খ''$$

$$\text{মনে কর } \odot = প, \text{ চাপ } খ'খ'' = অ ।$$

$$\text{তাহা হইলে চাপ } কখ' = \frac{1}{2} প - অ, \text{ চাপ } কগ'গ'খ' = \frac{1}{2} প + অ ।$$

$$\text{এবং চাপ } কগ'গ'' = \text{চাপ } খ'খ'গ'' = \frac{1}{2} প + \frac{1}{2} অ ।$$

$\triangle কগ'খ'$ আবার বর্দ্ধিত হইবে যদি $খ'$ কে চাপ $কখ'গ'$ এর
মধ্যবিন্দু $খ''$ তে সরান যায়, এবং $\triangle কখ'গ'$ এর

$$\text{সমান বাহুর উপরের চাপ} = \frac{1}{2} প - \frac{1}{2} অ,$$

$$\text{ভূমির উপরের চাপ} = \frac{1}{2} প + \frac{1}{2} অ ।$$

এইরূপে চলিলে, Δ কথ'প' ক্রমশঃ বর্দ্ধিত হইতে থাকিবে,
এবং তাহার সমান বাহুর উপরের ও ত্বির উপরের চাপ যথাক্রমে,

$$\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a \text{ এবং } \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}a \text{ এবং } \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}a \text{ এবং } \frac{1}{2}p \mp \frac{1}{2}a, \text{ হইবে।}$$

ন অযুগ্ম হইলে উপরের চিহ্ন
এবং যুগ্ম হইলে নিম্নের চিহ্ন গ্রহণীয় ।
আর ন অসীমরূপে বর্দ্ধিত হইলে,
চাপগুলি ত্রুপ'ব সন্নিহিত হইবে,
 Δ কথ'প' সমবাহু ত্রিভুজ হইবে,
এবং তাহার পৰ আব বর্দ্ধিত হইবে না ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণ মালা ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ ও ২ দ্রষ্টব্য ।)

১। বৃত্তের যে সকল জ্যা কেন্দ্রগামী নহে তাহাদেব সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব সমূহ এক বিন্দুস্থী ।

২। বৃত্তের সামান্তর জ্যাব সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব এক ঋজুরেখায় থাকিবে ।

৩। চাট বৃত্তের প্রত্যেকটিই দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বিগা যাইতেছে, এবং তন্মধ্যে বৃহত্তরটিব কেন্দ্র অপব বৃত্তের পরিধিস্থিত । যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তেব ব্যাস ঐ বিন্দুদ্বয়ের দ্বর্ষেব সমান হয়, তাহা হইলে বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধেব বর্গ ক্ষুদ্রতর বৃত্তেব ব্যাসার্দ্ধের বর্গের দ্বিগুণ হইবে ।

৪। যদি কোন নির্দিষ্ট তিন বিন্দুগামী বৃত্তেব কেন্দ্র তন্মধ্যে দুই বিন্দুয যোজক ঋজুরেখায় থাকে, তাহা হইলে তৃতীয় বিন্দুতে সেই যোজকের বিপবীত কোন সন্যোগ ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৪ দ্রষ্টব্য ।)

৫। যদি কোন সামান্তরিকের কোণবিন্দু বৃত্তপরিধিস্থিত হয়, তাহা হইলে সেই সামান্তরিক, আয়ত হইবে ।

৬। বৃত্তেব অন্তরঙ্কিত চতুর্ভুজ সমবাহু হইলে তাহা সমানকোণী হইবে ।

৭। বৃত্তেব সমুন্নয় সমান জ্যাব মধ্য বিন্দু সমূহ তাহার সমকেন্দ্র বৃত্তান্তবে অবস্থিত । এবং সেই বৃত্তদ্বয়েব ব্যাসার্দ্ধের বর্গেব অন্তর সেই সমান জ্যার অর্দ্ধেকের বর্গের সমান ।

৮। বৃত্ত মধ্যস্থ যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যত ঋজুরেখা টানা যাইতে পাবে, তন্মধ্যে কেন্দ্রগামী রেখা বৃহত্তম এবং তাহার অপর ভাগটি ক্ষুদ্রতম । আব অস্তান্ত রেখাব মধ্যে বৃহত্তমেব নিকটস্থ রেখা অপেক্ষাকৃত দুঃস্থ রেখা হইতে বৃহত্তব ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৬ দ্রষ্টব্য ।)

৯। যে কোন জ্যার উপর দণ্ডায়মান এবং জ্যার চাপস্থ যে কোন বিন্দু শীর্ষবিন্দু, এইরূপ ত্রিভুজ সমূহের মধ্যে বাহার শীর্ষ চাপের মধ্যবিন্দু সেই ত্রিভুজটি বৃহত্তম ।

১০। বৃত্তে অন্তরঙ্কিত সমবাহু বহুভুজের বাহুর সম্মুখের কেন্দ্রস্থ সমস্ত কোণ সমান ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-৯ দ্রষ্টব্য ।)

১১। ব্যাসের প্রাস্তস্থিত স্পর্শিনীঘর পরস্পর সমান্তর, এবং সেই ব্যাস যে সকল জ্যার সম্বন্ধিতকারী লম্ব তাহাদেরও সমান্তর ।

১২। বৃত্তের যে কোন স্পর্শিনীঘরের অন্তর্গত কোণ, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিপূরক ।

১৩। বৃত্তের বাহিরের যে কোন বিন্দু হইতে টানা স্পর্শিনীঘর সেই বিন্দুগামী ব্যাসের প্রাস্তস্থ যে কোণদ্বয়ের সম্মুখীন তাহারা পরস্পর সমান ।

১৪। বৃত্তের বহিরস্থিত চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়গণের সমষ্টিদ্বয় পরস্পর সমান ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-১১ দ্রষ্টব্য ।)

১৫। একই ভূমির উপর একই সমান্তরের অন্তর্গত ত্রিভুজসমূহের মধ্যে যেটি সমবাহু তাহাবই শীর্ষকোণ বৃহত্তম ।

১৬। বৃত্তের পৃথিবিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে অন্তরস্থিত যে কোন ত্রিভুজের বাহু উপর লম্ব টানিলে সেই তিন লম্বের পদত্রয় এক সরুরেখায় হইবে ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১-১২ দ্রষ্টব্য ।)

১৭। ছটি সম্পাতী বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানিলে, বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের যোজক সরুরেখা স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশকে সম্বন্ধিত করিবে ।

১৮। যদি ছটি বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করে, আর তাহাদের ছটি স্পর্শিনী টানা যায় ও তাহার একটি বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী হয়, তাহা হইলে শেবোক্ত স্পর্শিনী অপর স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশকে সম্বন্ধিত করিবে ।

১৯। ছটি বৃত্ত পরস্পর বাহিরে স্পর্শ করিতেছে । তাহাদের ব্যাসার্ধ ২ ইঞ্চ এবং ৪ ইঞ্চ । তাহাদের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানা গিয়াছে । সেই স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের পরিমাপ কত ?

২০। একটি বৃত্তের ব্যাস ৫ ইঞ্চ । তাহার মধ্যে একটি ৩ ইঞ্চ জ্যা অঙ্কিত হইয়াছে । কেন্দ্র হইতে সেই জ্যার দূরত্ব কত ?

তৃতীয় অধ্যায় ।

সমানুপাতী আয়তন এবং সদৃশ ক্ষেত্র ।

প্রথম পরিচ্ছেদ ।

পরিভাষা ।

উপক্রমণিকা । জ্যামিতির আয়তনের দুটি গুণ আলোচ্য বিষয়, স্থান ও মান ।

আয়তনের, অর্থাৎ রেখা, কোণ, ও ত্রিভুজ প্রভৃতি ক্ষেত্রের, মানের কেবল একপ্রকার সম্বন্ধ এ পর্য্যন্ত আলোচিত হইয়াছে, অর্থাৎ মানের সাম্য ও বৈষম্য । কিন্তু সাম্য ও বৈষম্য ব্যতীত আয়তনের মানের আর একপ্রকার সম্বন্ধ আছে বাহ্যকে সমানুপাতত্ব বলা যায় । সে সম্বন্ধও এক প্রকার সাম্য, কিন্তু সে সাম্য আয়তনদ্বিগের নিজেদের সাম্য নহে, তাহাদের পরস্পরের মানবিশেষক সম্বন্ধের সাম্য ।

যথা, যদি দুটি অসমান ত্রিভুজের একটির কোণত্রয় অপরটির কোণত্রয়ের সহিত যথাক্রমে সমান হয়, একের কোন এক কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয় ও অপরটির তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয় পরস্পর অসমান হইলেও প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের পরস্পরের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ দ্বিতীয়োক্ত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধের সহিত সমান, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের তৃতীয় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গ্রহণ করা যাইবে ।

তথা, বাহুর দৈর্ঘ্যের সহিত কর্ণের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ, দুটি অসমান বর্গক্ষেত্রেও সমান ।

মান বিষয়ক ঐক্য সম্বন্ধকে সমানুপাত বলে, এবং দুই অসমানুপাতের সাম্যকে সমানুপাত বলে ।

পরিভাষা ১। চাট একপ্রকারের আয়তনের পরিমাণের সম্বন্ধকে **অনুপাত** বলে, এবং প্রথমটি দ্বিতীয়টির কত গুণ বা কত ভাগ তাহাই অনুপাত সম্বন্ধের বিবেচ্য বিষয়।

২। চারিটি আয়তনের মধ্যে প্রথমটির সহিত দ্বিতীয়টির অনুপাত সম্বন্ধ যদি তৃতীয়ের সহিত চতুর্থের অনুপাত সম্বন্ধের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ চারিটি আয়তনের মধ্যে **সমানুপাত** আছে, এবং আয়তন চতুর্থই **সমানুপাতী**, বলা যায়।

৩। যদি তিনটি আয়তন ক্রমাগত সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাতকে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাতের **দ্বিঘাত** বা **দ্বিগুণ অনুপাত** বলে, এবং দ্বিতীয় আয়তনকে প্রথম ও তৃতীয়ের **মধ্য সমানুপাতী** বলে।

৪। সমানুপাতীদিগের মধ্যে অনুপাতের পূর্ব পদগুলিকে তথা পরপদগুলিকে পরস্পরের **সমভাবী** বা **সমনীল** বলে।

৫। যে ঋজুৈখিক ক্ষেত্রদ্বয়ের একের কোণগুলি অপরের কোণের সহিত যথাক্রমে সমান, এবং একের প্রত্যেক কোণসংলগ্ন বাহুগুল ও অপরের তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুগুল সমানুপাতী, তাহাদিগকে **সদৃশ ঋজুৈখিক ক্ষেত্র** বলে।

টিপ্পনী ১। উপরে উক্ত পরিভাষার কিঞ্চিৎ ব্যাখ্যা আবশ্যক হইতে পারে।

যদি **ক** ও **খ** দুইটি আয়তনের পরিমাণ বা দুইটি রাশি হয়, তাহা হইলে তাহাদের অনুপাত

ক : খ

এইরূপ লিখিত হয়। এবং অনুপাতের অর্থানুসারে

$$\text{ক : খ} = \frac{\text{ক}}{\text{খ}}, \text{ এই ভাৱে।}$$

কারণ, **ক : খ** এবং $\frac{\text{ক}}{\text{খ}}$ উভয়েই **ক, খ**র কত গুণ বা কত ভাগ, তাহাই বুঝায়।

যদি $k \cdot x :: g \cdot y$,

তাহা হইলে $\frac{k}{x} = \frac{g}{y}$ ।

এবং এই শেখোক্ত সমীকরণ হইতে অনেকগুলি সমীকরণ পাওয়া যায়। তাহা বীজগণিতের গ্রন্থে আলোচিত হইয়া থাকে, এবং এই সরল গণিতের দ্বিতীয় ভাগে বীজগণিতের অষ্টম অধ্যায়ে সে সকল বিষয় আলোচিত হইয়াছে। অতএব এখানে তাহার পুনরুক্তি নিম্নয়োজন। তবে বিজ্ঞার্থীর সুবিধাব নিমিত্ত সেই আলোচনার ফল নিম্নে সংক্ষেপে লিপিবদ্ধ করা গেল।

যদি $k \cdot x :: g \cdot y$

অর্থাৎ $\frac{k}{x} = \frac{g}{y}$, তাহা হইলে

$$(১) \quad \frac{x}{k} = \frac{y}{g} \text{ বিপর্যয় ক্রমে।}$$

$$(২) \quad \frac{k}{g} = \frac{x}{y} \text{ (একান্তরক্রমে)।}$$

$$(৩) \quad \frac{k+x}{x} = \frac{g+y}{y} \text{ (যোগ ক্রমে)।}$$

$$(৪) \quad \frac{k-x}{x} = \frac{g-y}{y} \text{ (বিয়োগ ক্রমে)।}$$

টিপ্পনী ২। যদি $\frac{k}{x} = \frac{g}{y}$,

তাহা হইলে $kx = xy$ ।

এবং যদি k, x, g, y চারিটি কল্পরেখার সৈধ্য হয়,

তাহা হইলে $kx = k$ এবং y 'র অন্তর্গত আয়তের ক্ষেত্রফল,

$$xy = x \text{ এবং } g'y \quad \dots$$

(১, উঃ অঃ ২০, টিপ্পনী ১, ২ প্রত্যয়)

অতএব যদি চারিটি কল্পরেখা সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রথম ও চতুর্থের অন্তর্গত আয়ত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

টিপ্পনী ৩। অস্থপাত শব্দ উপরে যে অর্থে ব্যবহার করা গিয়াছে তাহাতে মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, যে সকল আরতনের অস্থপাতের কথা বলা হইল তাহার সংখ্যাধারা পরিমের। কিন্তু এরূপ আরতন অনেক আছে বাহা সসীম সংখ্যাধারা টিক পরিমের নহে। বধা, মনে কর একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ৩ ইঞ্চি, অর্থাৎ ১ ইঞ্চিকে মাপের একক বলিয়া লইলে সেই দৈর্ঘ্য ৩ এই সংখ্যাধারা প্রকাশ করা যায়। তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের কর্ণ = $\sqrt{৩^২+৩^২}$ ইঞ্চি = $\sqrt{২ \times ৩^২}$ ইঞ্চি = $\sqrt{২} \times ৩$ ইঞ্চি। কিন্তু $\sqrt{২}$ -এর মূল্য কোন সসীম সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। বলা বাইতে পারে বটে $\frac{\text{বর্গক্ষেত্রের কর্ণ}}{\text{বর্গক্ষেত্রের বাহু}} = \sqrt{\frac{২}{১}} = \sqrt{২}$, অতএব এই অস্থপাতের মূল্য $\sqrt{২}$, কিন্তু তাহা কেবল কথা মাত্র, কারণ $\sqrt{২}$ এর মূল্য কত তাহা সসীম অঙ্কদ্বারা প্রকাশ্য নহে। তবে বর্গমূল আকর্ষণের প্রক্রিয়া চালাইলে, ক্রমশঃ ২ এর বর্গমূলের লগমিকের দ্বারা যত সংখ্যার বৃদ্ধি হইতে থাকিবে, লব্ধ বর্গমূল ততই প্রকৃত মূলের সন্নিহিত হইতে থাকিবে। এবং দেয়) মাপের একক ১ ইঞ্চি লইলে যদিও ৩ ইঞ্চি বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য ইঞ্চি দ্বারা টিক প্রকাশ করা যায় না, $\sqrt{১০}$ ইঞ্চি বা $\sqrt{১০}$ ইঞ্চি অথবা ১ ইঞ্চির আরও ক্ষুদ্রতর ভাগ একক বলিয়া লইলে, সংখ্যা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রের কর্ণের পরিমাণ সম্পূর্ণ টিকরূপে বা হটক প্রায় টিকরূপে প্রকাশ করা যায়। একথা পূর্বে ১ম অধ্যায়ের ১১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার ২ টিপ্পনীতে বলা হইয়াছে। এইরূপে, সংখ্যাধারা অপরিমের আরতন বা রাশির টিক মূল্য সসীম সংখ্যাধারা প্রকাশ যোগ্য না হইলেও, যতদূর ইচ্ছা তাহার সন্নিহিত মূল্য সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, এবং তাহাতে যে অতি অল্প ভুল থাকে তাহা বর্তব্য হয় না। অতএব এই ভাবে দেখিলে, **অসংখ্যাতঃ** সকল আরতন বা রাশি সংখ্যা দ্বারা পরিমের মনে করা বাইতে পারে।

টিপ্পনী ৪। যদি তিনটি আরতন বা রাশি ক্রমান্বয়ে সমাস্থপাতী হয়, বধা

ক · খ · গ,

অর্থাৎ $\frac{ক}{খ} = \frac{খ}{গ}$, তাহা হইলে

$$\frac{ক}{গ} = \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ} = \frac{ক^২}{খ^২}।$$

অতএব উপরে ৩ পরিভাষায় যে বিখ্যাত বা বিস্তৃত অস্থপাতের কথা বলা হইয়াছে তাহা অস্থপাতী রাশিধরের বর্গের অস্থপাত।

টিপ্পনী ৫। পূর্ববর্তী অধ্যায়দ্বয়ে যেমন এ অধ্যায়েতেও তেমনই, যে সকল বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রের কথা আছে তাহা সমস্ত এক সমতলস্থ বলিয়া মানিয়া লইতে হইবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ ।

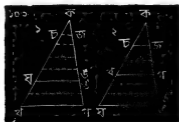
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর দ্বারা বাহু-
দ্বয়ের বিভাগ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

১। যদি ত্রিভুজের কোন এক বাহুর
সমান্তর ঋজুরেখা টানা যায়; তাহা হইলে
তদ্বারা অপর বাহুদ্বয় যে খণ্ড চতুর্ভুজে
বিভক্ত হয় তাহার সমানুপাতী হইবে ।

২। পরিস্রুতক্রমে, যদি কোন ঋজুরেখা
ত্রিভুজের দুই বাহুকে সমানুপাতী খণ্ড চতুর্ভুজে
বিভক্ত করে, তাহা হইলে সেই রেখা ত্রিভুজের
তৃতীয় বাহুর সমান্তর হইবে ।



১। \triangle কখগ তে মনে কর ঘঙ ॥ খগ,

এবং ঘঙ, কখ কে ১ম চিত্রে,

ও কখ'র বর্দ্ধিত ভাগকে ২য় চিত্রে,

ঘ এবং ও তে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে $\frac{কঘ}{ঘখ} = \frac{কঙ}{ঙগ}$ ।

মনে কর কষ ও ঘথ'র সাধারণ গুণনীয়ক কচ,

এবং কষ = $m \times$ কচ, ঘথ = $n \times$ কচ ।

কষ ও ঘথকে m ও n সমান ভাগে ভাগ করিরা,

ছেমবিন্দু দিরা ঃ রে: ॥ খ'গ টান,

তাহা হইলে সেট ঃ রে: কঙকে m সংখ্যক, ও'গকে n সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত করিবে (১, উ: প্র: ১৭, অহু: ৩) ।

∴ কঙ = $m \times$ কজ, ও'গ = $n \times$ কজ ।

এবং ∴ $\frac{\text{কষ}}{\text{ঘথ}} = \frac{m \times \text{কচ}}{n \times \text{কচ}} = \frac{m}{n} = \frac{m \times \text{কজ}}{n \times \text{কজ}} = \frac{\text{কঙ}}{\text{ও'গ}}$ ।

২। প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় ভাগ সপ্রমাণ কবণার্থে,

যদি ঘঙ ॥ খ'গ না হয়, মনে কব ঘঙ' ॥ খ'গ ।

তাহা হইলে $\frac{\text{কষ}}{\text{ঘথ}} = \frac{\text{কঙ}'}{\text{ও'গ}'} = \frac{\text{কঙ}}{\text{ও'গ}}$ (কল্পনা মতে) ।

∴ $\frac{\text{কঙ}' \pm \text{ও'গ}'}{\text{ও'গ}'} = \frac{\text{কঙ} \pm \text{ও'গ}}{\text{ও'গ}}$, অর্থাৎ $\frac{\text{কগ}}{\text{ও'গ}} = \frac{\text{কগ}}{\text{ও'গ}}$ ।

∴ ও'গ = ও'গ, সূত্রবাং ও' ও ও ভিন্ন নহে ।

এবং ∴ ঘঙ ॥ খ'গ ।

টিপ্পনী ১। এই প্রতিজ্ঞার প্রদর্শিত প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ করা বাইতে পারে যে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে কোন বৃত্তছেদকের চাপের যে কোন বিন্দুতে ওজুরেখা টানিলে, সেই রেখা বৃত্তছেদকের চাপকে ও কেন্দ্রস্থ কোণকে সমানুপাতে বিভক্ত করিবে ।

কারণ, সেই রেখা বৃত্তছেদকের কোণকে যে দুই ভাগে বিভক্ত করে, সেই কোণদ্বয়ের সাধারণ গুণনীয়ক একটী সূত্র কোণ লইয়া সেই পরিমাণ সমানভাবে উক্ত কোণদ্বয়কে বিভক্ত করিলে, দেখা বাইবে সেই কোণদ্বয়, এবং তাহারে যে যে চাপের উপর বর্তমান সেই চাপদ্বয়, সমান সমান ভাগে বিভক্ত হইবে, কেন না সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর বর্তমান থাকে । সূত্রবাং প্রযোজ্য রেখাচারে কেন্দ্রস্থ কোণ যে অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে চাপও ঠিক সেই অনুপাতে বিভক্ত হইবে ।

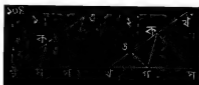
টিপ্পনী ২। ঐরূপ প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ করা বাইতে পারে যে, সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয় ও তাহাদের ভূমির সমানুপাতী, কারণ সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ও সমান ভূমির উপস্থিত ত্রিভুজ সমান । (১, উ: প্র: ২০, অহু: ২ ব্রহ্ম) ।

২। শীর্ষকোণ সমদ্বিগুণকারী রেখাদ্বারা
ত্রিভুজের ভূমি বিভাগ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২।

১। যদি কোন ঋজুরেখা ত্রিভুজের শীর্ষ-
কোণকে অথবা তৎসম্মিহিত বাহিরের
কোণকে সমান দুইখণ্ড করে, তবে সেই রেখা
ত্রিভুজের ভূমিকে অন্তরে অথবা বাহিরে
বাহুদ্বয়ের অনুপাতে দ্বিখণ্ড করিবে।

২। পরিস্ফুট ক্রমে, যদি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ
হইতে ভূমি পর্যন্ত টানা কোন ঋজুরেখা
ভূমিকে অন্তরে অথবা বাহিরে বাহুদ্বয়ের
অনুপাতে দ্বিখণ্ড করে, তবে সেই রেখা
শীর্ষকোণকে অথবা তৎসম্মিহিত বাহিরের
কোণকে সমান দ্বিখণ্ড করিবে।



মনে কর কক্ষ সমান দুইখণ্ড করিতেছে

Δ কখগ'র শীর্ষ ∠ খকগ'কে (১ম চিত্রে)

বা তৎসম্মিহিত বাহিরের ∠ খ'কগ'কে (২য় চিত্রে)।

তাহা হইলে $\frac{\text{খঘ}}{\text{গঘ}} = \frac{\text{খক}}{\text{গক}}$ ।

গঙ। কঘ টান।

তাহা হইলে $\angle কঙগ = \angle থকঘ$ বা $\angle থ'কঘ$ (১, উ: প্র: ৬)
 $= \angle গকঘ$ (কল্পনানুসারে)
 $= \angle কগঙ$ (১, উ: প্র: ৫)।

$\therefore গক = গঙ$ । (১, উ: প্র: ২)।

আবার $\therefore কঘ \parallel গঙ$,

$\therefore \frac{থঘ}{গঘ} = \frac{থক}{গক}$ (৩, উ: প্র: ১) $= \frac{থক}{গক}$ ।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, মনে কর, $\frac{থঘ}{গঘ} = \frac{থক}{গক}$ ।

তাহা হইলে $\angle থকঘ$ বা $\angle থ'কঘ = \angle গকঘ$ ।
 $গঙ \parallel কঘ$ চান।

তাহা হইলে $\frac{থঘ}{গঘ} = \frac{থক}{গক}$ (৩, উ: প্র: ১)
 $= \frac{থক}{গক}$ (কল্পনানুসারে)।

$\therefore গক = গক$, $\therefore \angle কগঙ = \angle কঙগ$ ।

কিন্তু $\angle কঙগ = \angle থকঘ$ বা $\angle থ'কঘ$,
এবং $\angle কগঙ = \angle গকঘ$ (১, উ: প্র: ৬ ও ৫)।
 $\therefore \angle গকঘ = \angle থকঘ$ বা $\angle থ'কঘ$ ।

টিপ্পনী ১। যদি $থক = গক$, $\angle থগক = \angle গথক$,
এবং $\angle থ'কগ = ২ \times \angle কগথ$ । সুতরাং $\angle গকঘ = \angle কগথ$,
এবং $\therefore কঘ \parallel থগ$, অতএব ঘ অনন্ত দূরে। তবে
সেই স্থলেও এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা এই ভাবে দেখিলে বজায় থাকে, যথা

$$\frac{থক}{গক} = \frac{থগ + \infty}{\infty}$$

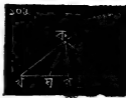
কারণ, $থক = গক$,

এবং $থগ + \infty = \infty$,

কেন না অনন্তের সহিত তুলনার $থগ$ কিছুই নহে,

এবং অনন্তের সহিত $থগ$ যোগ করিলে অনন্ত, অনন্তই থাকে।

টিপ্পনী ২। \angle ক'খ এবং \angle ক'ঙ, এবং \angle খ'ক'গ'কে সমান হই খণ্ড করে, তাহা হইল তাহার \angle খ'ঙ কে \angle ক'গ' প্রক্ষেপে ছেদ করে, অর্থাৎ একপে ছেদ করে যে, সমস্ত রেখা ও তারার এক প্রান্তের ঋণের যে অনুপাত, অপর প্রান্তের \angle ও মধ্য \angle ঋণের ঠিক সেই অনুপাত ।



এবং \angle খ'ঘ, \angle খ'গ, \angle খ'ঙ এই রেখার \angle নতুন শ্রেণীতে তিনটি পর পর পদ ।

$$\text{কারণ, } \frac{\angle \text{খ'ঙ}}{\angle \text{খ'গ}} = \frac{\angle \text{ক'খ}}{\angle \text{ক'গ}} = \frac{\angle \text{খ'ঘ}}{\angle \text{ঘ'গ}},$$

$$\therefore \frac{\angle \text{খ'ঙ}}{\angle \text{খ'ঘ}} = \frac{\angle \text{খ'ঙ}}{\angle \text{ঘ'গ}} \text{ (একান্তর ক্রমে)।}$$

$$\text{আবার } \frac{\angle \text{খ'ঙ}}{\angle \text{খ'ঘ}} = \frac{\angle \text{খ'ঙ}}{\angle \text{ঘ'গ}} = \frac{\angle \text{খ'ঙ} - \angle \text{খ'গ}}{\angle \text{ঘ'গ} - \angle \text{খ'গ}}$$

$$\text{অথবা, } \frac{\angle \text{খ'ঘ}}{\angle \text{খ'ঙ}} = \frac{\angle \text{ঘ'গ} - \angle \text{খ'ঘ}}{\angle \text{খ'ঙ} - \angle \text{ঘ'গ}} \text{।}$$

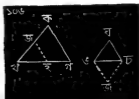
দেখা গিয়াছে যে, যদি বাস্তব যন্ত্রের তিনটি তার, একই পদার্থে নির্মিত, সমান মোটা, এবং সমান জোরে কসা হয়, এবং যদি তাহাদের বৈধা \angle খ'ঘ, \angle খ'গ, ও \angle খ'ঙ'র অনুপাতী হয়, তবে ধনিত হইলে তাহার \angle যে হারে বাজে তাহা \angle নতুন মত ও অতি সুস্বাদ্য । এই \angle একপে সমস্ত রেখার \angle নতুন শ্রেণীতে আবদ্ধ বলে ।

৩। সদৃশ ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

১। যদি দুটি ত্রিভুজ সমান কোণী হয়, তাহাদের সমান কোণের লগ্ন বাহুগুলি স্বাভাবিকভাবে সমানুপাতী হইবে। এবং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

২। পরিস্ফুটকভাবে, যদি দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি স্বাভাবিকভাবে সমানুপাতী হয়, তাহাদের সমানীক বা সমবর্ত্তী বাহুর সম্মুখীন কোণগুলি সমান হইবে। এবং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।



মনে কব ΔKXG ও ΔWTC 'র,

$$\angle K = \angle W, \angle X = \angle T, \angle G = \angle C.$$

তাহা হইলে $\frac{KX}{WT} = \frac{XG}{TC} = \frac{KG}{WC}.$

ΔWTC কে ΔKXG 'র উপর একপে স্থাপিত কব বে,
 $\angle W$, $\angle X$ 'র উপর পড়ে, এবং $\angle T$, $\angle G$ 'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে $\angle C$, $\angle XG$ 'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle WTC = \angle XG.$

মনে কব $\angle W$ ও $\angle T$, $\angle X$ ও $\angle G$ 'তে পড়িয়াছে। $\angle X$, $\angle G$ যোগ কর।

তাহা হইলে, $\therefore \angle XG = \angle W = \angle K, \therefore \angle XG = \angle K.$

(১, উঃ প্রঃ ৬)।

$$\text{এবং } \therefore \frac{\text{খজ}}{\text{কজ}} = \frac{\text{খহ}}{\text{গহ}}, \therefore \frac{\text{কজ}}{\text{খজ}} = \frac{\text{গহ}}{\text{খহ}} \text{ (বিপর্যয়ক্রমে)।}$$

$$\therefore \frac{\text{কখ}}{\text{খজ}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খহ}} \text{ (যোগক্রমে)।}$$

$$\text{কিন্তু } \text{খজ} = \text{ঘষ}, \text{খহ} = \text{ঙচ},$$

$$\therefore \frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}} = \frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}}।$$

$$\text{এবং সেইরূপে } \frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চঘ}}।$$

সুতরাং $\triangle \text{কখগ}$ ও $\triangle \text{ঘঙচ}$ সদৃশ।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, মনে কর,

$$\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}} = \frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চঘ}}।$$

তাহা হইলে $\angle \text{ক} = \angle \text{ঘ}, \angle \text{খ} = \angle \text{ঘঙচ}, \angle \text{গ} = \angle \text{ঙচঘ}।$

ঙ তে ও চ তে, $\angle \text{চঙজ}'$ ও $\angle \text{ঙচজ}' = \angle \text{খ}$ ও $\angle \text{গ}$ অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে $\angle \text{জ}' = \angle \text{ক}$ (১, উঃ প্রঃ ৮)।

অতএব $\triangle \text{কখগ}$ ও $\triangle \text{জ'ঙচ}$ সমান কোণী, এবং সদৃশ।

$$\therefore \frac{\text{কখ}}{\text{জ'ঙ}} = \frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}} = \frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}} \text{ (কল্পনানুসারে),}$$

$$\therefore \text{জ'ঙ} = \text{ঘঙ}।$$

সেইরূপে $\text{জ'চ} = \text{ঘচ}।$ এবং $\text{ঙচ}, \triangle \text{ঘঙচ}, \triangle \text{জ'ঙচ}'$ তে আছে।

$\therefore \triangle \text{ঘঙচ}$ ও $\triangle \text{জ'ঙচ}'$ সর্বাংশে সমান,

$$\text{এবং } \therefore \angle \text{ঘঙচ} = \angle \text{জ'ঙচ} = \angle \text{খ},$$

$$\angle \text{ঘচঙ} = \angle \text{জ'চঙ} = \angle \text{গ},$$

$$\angle \text{ঘ} = \angle \text{জ} = \angle \text{ক}।$$

সুতরাং $\triangle \text{কখগ}$ ও $\triangle \text{ঘঙচ}$ সদৃশ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৪।

যদি একটি ত্রিভুজের একটি কোণ আর একটি ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয়, এবং সেই সমান সমান কোণের সংলগ্ন বাহুগুলি স্বাভাবিকভাবে সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।



মনে কর \triangle কখগ ও \triangle ঘঙচ তে

$$\angle ক = \angle ঘ, \text{ এবং } \frac{কখ}{ঘঙ} = \frac{কগ}{ঘচ}।$$

হা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

\triangle ঘঙচকে \triangle কখগ'র উপর এক্ষেপে স্থাপিত কর যে,

ঘ, ক'র উপর পড়ে, এবং ঘঙ, কখ'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে ঘচ, কগ'র উপর পড়িবে, $\therefore \angle ঘ = \angle ক।$

মনে কর ঙ ও চ, জ ও হ'তে পড়িয়াছে। জ, হ যোগ কর।

তাহা হইলে $\therefore কজ = ঘঙ, কহ = ঘচ,$

$$\text{এবং } \frac{কখ}{ঘঙ} = \frac{কগ}{ঘচ},$$

$$\therefore \frac{কখ}{কজ} = \frac{কগ}{কহ},$$

$$\text{এবং } \therefore \frac{খজ}{কজ} = \frac{গহ}{কহ} \quad (\text{বিরোধক্রমে})।$$

\therefore জহ ॥ খগ (৩, উঃ প্রঃ ১)।

$\therefore \angle খ = \angle কজহ = \angle উ$ (১, উঃ প্রঃ ৬),

এবং $\therefore \angle গ = \angle চ$ । (১, উঃ প্রঃ ৮)।

$\therefore \triangle কখগ$ ও $\triangle ঘঙচ$ সমান কোণী ও সদৃশ (৩, উঃ প্রঃ ৩)

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

যদি একটি ত্রিভুজের একটি কোণ আর একটি ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয়, এবং তাহাদের একের আর একটি কোণের সংলগ্ন বাহুগুলি অপরের আর একটি কোণের সংলগ্ন বাহুগুলির সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে তাহাদের তৃতীয় কোণ সমান হইবে, অথবা পরস্পরের পরিপূরক হইবে।



মনে কব Δ কখগ ও Δ ঘঙচ তে

$$\angle খ = \angle ঙ, \text{ এবং } \frac{খক}{ঙঘ} = \frac{গক}{চঘ},$$

তাহা হইলে $\angle গ = \angle ঘচঙ$ বা $\angle ঘচঙ$ 'র পরিপূরক।

যদি $\angle ক = \angle ঙঘচ$, তবে $\angle গ = \angle ঘচঙ$

(১, উঃ প্রঃ ৮)।

যদি $\angle ক = \angle ঙঘচ$ না হয়,

তবে $\angle ঙঘচ = \angle ক$ অঙ্কিত কর (৩য় চিত্রে)।

তাহা হইলে Δ কখগ ও Δ ঘঙচ সমান কোণী এবং \therefore সদৃশ হইবে।

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \angle গ &= \angle ঘচ'ঙ, \\
 \text{এবং,} \quad \frac{\text{খক}}{\text{ঙঘ}} &= \frac{\text{পক}}{\text{চ'ঘ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চ'ঘ}} \quad (\text{কন্নানুসারে}) ; \\
 \therefore \quad \text{চ'ঘ} &= \text{চঘ} \therefore \angle চ = \angle ঘচ'চ \\
 &= \angle ঘচ'ঙ'র পরিপূরক \\
 &= \angle প'ঘ পরিপূরক ।
 \end{aligned}$$

টিপ্পনী । উপরের ৩, ৪, ৫ ও ৬ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ত্রিভুজের সাদৃশ্য বিষয়ক । দুটি ত্রিভুজের সাদৃশ্য নিম্নলিখিত কএকটি হলে যাচাইতে পারে ।

১। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের সমান কোণ দুই হয়, তাহারা সদৃশ । একথা উপরে ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গমাণ করা হইয়াছে । ত্রিভুজদ্বয়ের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ হইল নাই ।

২। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে সমানুপাতী হয়, তাহা হইলেও ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ । একথাও উপরে ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গমাণ করা হইয়াছে । ত্রিভুজদ্বয়ের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ হইল ১ম অধ্যায়ের ১৩ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

৩। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের একটির একটি কোণ অপরের একটি কোণের সমান হয়, এবং একের সেই কোণ সংলগ্ন বাহুগুলি অপরের তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুগুলির সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে । একথা উপরে ৪ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গমাণ করা হইয়াছে । ত্রিভুজের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ হইল ১ম অধ্যায়ের ১২ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

৪। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের একটির একটি কোণ অপরের একটি কোণের সমান হয়, এবং একের আর একটি কোণসংলগ্ন বাহুগুলি অপরের আর একটি কোণ সংলগ্ন বাহুগুলির সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে, অথবা একের তৃতীয় কোণ অপরের তৃতীয় কোণের পরিপূরক হইবে । একথা উপরে ৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গমাণ করা হইয়াছে । ত্রিভুজের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ হইল ১ম অধ্যায়ের ১৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

৪। সদৃশ বহুভুজ ও ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৬।

যদি কোন বহুভুজের মধ্যস্থিত কোন বিন্দু তাহার কোণবিন্দুর সহিত যোগ করিয়া তাহাকে কতকগুলি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়, তাহা হইলে তৎসদৃশ অপর যে কোন বহুভুজকে তদনুরূপ সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইতে পারে।



মনে কর বহুভুজ কখগঘঙ, বিন্দু ও হইতে তাহার কোণে টান

| দ্বারা, Δ এতে বিভক্ত হইয়াছে,

এবং মনে কর ক'খ'গ'ঘ'ঙ' একটি তৎসদৃশ বহুভুজ।

তাহা হইলে ক'খ'গ'ঘ'ঙ' ও সেইরূপে ততগুলি তৎসদৃশ Δ এ বিভক্ত হইতে পারে।

ক' এবং খ'এতে \angle ক'খ'ঙ' এবং \angle ক'খ'ঙ' = \angle ক'খ'ঙ' এবং \angle ক'খ'ঙ' অঙ্কিত কর। এবং ও'গ', ও'ঘ', ও'ঙ' যোগ কর।

তাহা হইলে Δ ও'ক'খ' এবং Δ ও'ক'খ' সঠি দেখা যাইবে সমান কোণী।

$\therefore \frac{\text{ও'খ'}}{\text{ও'ঘ'}} = \frac{\text{ক'খ'}}{\text{ক'ঘ'}} \quad (৩, উঃ প্রঃ ৩) = \frac{\text{খ'গ'}}{\text{খ'ঘ'}}$, \therefore বহুভুজের সদৃশ।

এবং $\therefore \angle$ ক'খ'গ' = \angle ক'খ'গ', আর \angle ক'খ'ঙ' = \angle ক'খ'ঙ',

$\therefore \angle$ ও'খ'গ' = \angle ও'খ'গ' (যত: সিদ্ধ ৩)।

$\therefore \Delta$ ও'খ'গ' এবং Δ ও'খ'গ' সদৃশ (৩, উঃ প্রঃ ৪)।

এরূপে দেখা যাইবে, Δ ক'গ'ঘ, Δ ক'ঘ'ঙ, Δ ক'ঙ'ক, ত্রিভুজত্রয় বধাক্রমে
 Δ ক'খ'ঘ, Δ ক'ঘ'ঙ, Δ ক'ঙ'ক' ত্রিভুজত্রয়ের সদৃশ ।

টিগুনী । যদি বিন্দু Δ বহুবুজের
 কোণ ক তে থাকে, তাহা হইলে প্রতিজ্ঞাটি
 নিম্ন লিখিত প্রকারে সপ্রমাণ করা যাইতে
 পারে ।

ক', গ', এবং ক', ঘ' যোগ কর ।

তাহা হইলে স্ট্র দেখা যাইতেছে Δ ক'খ'গ' এবং Δ ক'খ'গ' সদৃশ ।

(৩, উঃ প্রঃ ৪) ।

এবং উপরের প্রদর্শিত প্রণালী অঙ্কনধর্মেরে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, Δ ক'গ'ঘ,
 Δ ক'গ'ঘ', এবং Δ ক'ঘ'ঙ, Δ ক'ঘ'ঙ' সদৃশ ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে নির্দিষ্ট । ক'খ' এর উপর
 নির্দিষ্ট বহুবুজ ক'খ'গ'ঘ'ঙ'র সদৃশ বহুবুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায় ।

কারণ, | ক'খ' এর উপর Δ ক'খ'গ'র সমান কোণী Δ ক'খ'গ'
 অঙ্কিত কর (১, সঃ প্রঃ ২ এর সাহায্যে), ক'গ' এর উপর Δ ক'গ'ঘ'র
 সমান কোণী Δ ক'গ'ঘ' অঙ্কিত কর, এবং ক'ঘ' এর উপর Δ ক'ঘ'ঙ'র
 সমান কোণী Δ ক'ঘ'ঙ' অঙ্কিত কর । তাহা হইলে ক'খ'গ'ঘ'ঙ' ইষ্ট
 বহুবুজ হইবে ।



উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

একটি নির্দিষ্ট ঋতুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দুর সহিত কোন একটি বিন্দুর যোজক ঋতুরৈখ্যগুলি যদি একই অনুপাতে বাহিরে বা ভিতরে বিভক্ত করা যায়, তাহা হইলে সেই বিভাগ বিন্দুগুলি আর একটি সদৃশ, এবং সমভাবে স্থিত ঋতুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দু হইবে।



মনে কব কখগঘ একটি ঋতুরৈখিক ক্ষেত্র,
এবং ওক, ওখ, ওগ, ওঘ, ক', খ', গ', ঘ' এতে, বাহিরে বা ভিতরে,
একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে।

তাহা হইলে কখগঘ এবং ক'খ'গ'ঘ' সদৃশ ও সমভাবে স্থিত
ঋতুরৈখিক ক্ষেত্র হইবে।

$$\text{কারণ, } \therefore \frac{\text{ওক}}{\text{ওক}'} = \frac{\text{ওখ}}{\text{ওখ}'} = \frac{\text{ওগ}}{\text{ওগ}'},$$

$$\therefore \text{কখ} \parallel \text{ক'খ'}, \text{খগ} \parallel \text{খ'গ'} \quad (\text{৩, উ: প্র: ১})।$$

$$\text{এবং } \therefore \angle \text{কখগ} = \angle \text{ক'খ'গ'} \quad (\text{১, উ: প্র: ৭, অনু: ১})।$$

এইরূপে দেখা যাইবে, কখগঘ এবং ক'খ'গ'ঘ' এর অপর \angle গুলিও সমান।

আবার \therefore কখ \parallel ক'খ', এবং খগ \parallel খ'গ',

$\therefore \Delta$ ওকখ, Δ ওক'খ', এবং Δ ওখগ, Δ ওখ'গ' সদৃশ,

এবং $\therefore \frac{\text{কখ}}{\text{ক'খ'}} = \frac{\text{ওখ}}{\text{ওখ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}}$ ।

এইরূপে দেখা যাইবে, ক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহ বাহুগুলিও সমান্তরাল ।

অতএব ক্ষেত্রদ্বয় সদৃশ ।

এবং তাহারা সমভাবে স্থিত, যে হেতুক তাহাদের সমবর্তী বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল ।

অনুমান । উপরে যাহা বলা হইয়াছে তাহা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, দুটি সদৃশ ও সমভাবে স্থিত ঋজুবৈধিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দুবোজকগুলি একবিন্দুগামী ।

কাবণ, মনে কর । কক' এবং । খখ', ও তে মিলিত ।

ওগ, ওগ', কগ, ক'গ' যোগ কর ।

তাহা হইলে Δ ওগক এবং Δ ওগ'ক' যে সদৃশ তাহা সহজেই সপ্রমাণ হইবে ।

$\therefore \angle$ কওগ $= \angle$ ক'ওগ', এবং \therefore ওগ, ওগ' একই ঋজুরেখাতে অবস্থিত ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮ ।

সদৃশ ত্রিভুজের ও সদৃশ বহুভুজের
পরস্পরের অনুপাত তাহাদের সমবর্তী
বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান ।



১। মনে কর কখগ এবং ক'খ'গ' দুই সদৃশ Δ ।

$$\text{তাহা হইলে } \frac{\Delta \text{ কখগ}}{\Delta \text{ ক'খ'গ'}} = \frac{\text{খগ}^2}{\text{খ'গ'}^2} ।$$

কখ, ক'খ' \perp খগ, খ'গ' টান ।

তাহা হইলে $\Delta \text{ কখঘ}$ এবং $\Delta \text{ ক'খ'ঘ'}$ স্পষ্ট দেখা যায় সমান কোণী
এবং সদৃশ ।

$$\therefore \frac{\text{কঘ}}{\text{ক'ঘ'}} = \frac{\text{কখ}}{\text{ক'খ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} ।$$

$$\text{অতএব } \frac{\Delta \text{ কখগ}}{\Delta \text{ ক'খ'গ'}} = \frac{\frac{1}{2} \text{খগ} \cdot \text{কঘ}}{\frac{1}{2} \text{খ'গ'} \cdot \text{ক'ঘ'}} \quad (১, \text{উ: প্র: } ২০, \text{টি: } ২)$$

$$= \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} \cdot \frac{\text{কঘ}}{\text{ক'ঘ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} \cdot \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} = \frac{\text{খগ}^2}{\text{খ'গ'}^2} ।$$

২। মনে কর কখগঘঙ, ক'খ'গ'ঘ'ঙ' দুই সদৃশ বহুভুজ ।

$$\text{তাহা হইলে } \frac{\text{কখগঘঙ}}{\text{ক'খ'গ'ঘ'ঙ'}} = \frac{\text{কখ}^2}{\text{ক'খ'}^2} ।$$

কারণ বহুভুজদ্বয় সমসংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে

(৩, উ: প্র: ৬) ।

আর $\frac{ক'খ}{ক'খ} = \frac{খ'গ}{খ'গ} = \frac{গ'ঘ}{গ'ঘ} =$ ইত্যাদি,

এবং $\frac{\Delta \text{ও} ক'খ}{\Delta \text{ও} ক'খ} = \frac{ক'খ^২}{ক'খ^২} = \frac{খ'গ^২}{খ'গ^২} = \frac{\Delta \text{ও} খ'গ}{\Delta \text{ও} খ'গ} =$ ইত্যাদি ।

∴ $\frac{ক'খ'গ'ঘ'ঙ$ 'র অন্তর্গত Δ সমষ্টি $ক'খ^২$
 $ক'খ'গ'ঘ'ঙ$ 'র অন্তর্গত Δ সমষ্টি $ক'খ^২$,

অর্থাৎ $\frac{\text{বহুবল } ক'খ'গ'ঘ'ঙ}{\text{বহুবল } ক'খ'গ'ঘ'ঙ} = ক'খ^২$ ।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণস্থিত ক্ষেত্র, এবং বাহুবস্থিত সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সম্বন্ধ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২।

সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের উপরে অঙ্কিত যে কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র সেই ত্রিভুজের বাহুবস্থিত উপর তৎসদৃশ ও তৎসমান ভাবে অঙ্কিত ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



মনে কর কর্ণগু সম \triangle ঋকর্গ বিশিষ্ট \triangle ,
এবং $র১$, $র২$, $র৩$, তাহার কর্ণ ঋর্গ ও বাহুদ্ব গক, কখ'র উপর
সদৃশ ও সমভাবে অঙ্কিত ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র।

তাহা হইলে $র১ = র২ + র৩$ ।

ক হইতে ঋর্গ'র উপর লম্ব কঘ টান।

তাহা হইলে \triangle ঘখক ও \triangle ঘকর্গ, \triangle কখর্গ'র সদৃশ,

$$\text{এবং } \therefore \frac{\text{গখ}}{\text{খক}} = \frac{\text{খক}}{\text{খঘ}}, \quad \text{ও} \quad \frac{\text{গখ}}{\text{গক}} = \frac{\text{গক}}{\text{গঘ}}$$

$$\text{এবং } \therefore \text{খক}^2 = \text{গখ} \cdot \text{খঘ}, \quad \text{ও} \quad \text{গক}^2 = \text{গখ} \cdot \text{গঘ}$$

(৩ পরিভাষা ৫, টি: ১, ২)।

$$\therefore \text{খক}^2 + \text{গক}^2 = \text{গখ} \cdot \text{খঘ} + \text{গখ} \cdot \text{গঘ} = \text{গখ}^2।$$

$$\text{আবাব } \frac{র_২}{র_১} = \frac{কগ^২}{খগ^২}, \quad \frac{র_৩}{র_১} = \frac{কখ^২}{খগ^২}$$

(৩, উঃ প্রঃ ৮) ।

$$\therefore \text{ যোগক্রমে, } \frac{র_২ + র_৩}{র_১} = \frac{কগ^২ + কখ^২}{খগ^২} = \frac{খগ^২}{খগ^২} ।$$

$$\therefore র_২ + র_৩ = র_১ ।$$

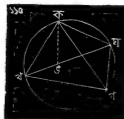
টিপ্পনী । উপরের প্রমাণ প্রণালীতে প্রতি লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে, সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ ও বাহুদ্বয়ের পরস্পরের মৈথোঁয় সম্বন্ধে একটু বিচিত্রতা আছে । সমকোণী হইতে কর্ণের উপর বহি লম্ব টানা বার, তদ্বারা কর্ণ দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে, এবং কর্ণ ও ত্রিভুজের এতোক বাহুর অনুপাত সেই বাহু ও কর্ণের তৎসংলগ্ন খণ্ডের অনুপাতের সমান । অতএব এতোক বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, কর্ণ ও তৎসংলগ্ন কর্ণ খণ্ডের অন্তর্গত আঘাতের সমান, এবং বাহুদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের উক্ত আঘাতদ্বয়ের, অর্থাৎ কর্ণের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান । সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, ১ম অধ্যায়ের ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞাব সত্যতা সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ ও বাহুদ্বয়ের মৈথোঁয় পরস্পরের সম্বন্ধ হইতে এক প্রকার অনুমের ।

ভাকবাচার্যের বীজ গণিতের ১৪৬ ধারায় এই কথাব কিঞ্চিৎ আভাস পাওয়া যায় ।

৬। ব্রহ্ম মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজের বাহুর
ও কর্ণের অন্তর্গত আয়তের সমান।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১০।

ব্রহ্ম মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের
অন্তর্গত আয়ত তাহার বিপরীত বাহুদ্বয়ের
অন্তর্গত আয়তদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



মনে কর কখগঘ, ০ কখগঘ মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজ।

তাহা হইলে কগ-খঘ = কখ-গঘ + কঘ-খগ।

\angle খকঙ = \angle গকঘ অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে $\therefore \angle$ কখঘ = \angle কগঘ (২, উঃ প্রঃ ১০, অহঃ ১),

$\therefore \triangle$ খকঙ ও \triangle গকঘ সদৃশ,

এবং $\therefore \frac{\text{কখ}}{\text{কগ}} = \frac{\text{খঙ}}{\text{গঘ}}$ (৩, উঃ প্রঃ ৩)।

\therefore কখ-গঘ = কগ-খঙ।

আবার, $\therefore \angle$ খকঙ = \angle গকঘ, $\therefore \angle$ ঙকগ যোগে,

\angle খকগ = \angle ঙকঘ,

এবং \angle খগক = \angle খঘক (২, উঃ প্রঃ ১০, অহঃ ১),

$\therefore \triangle$ খকগ ও \triangle ঙকঘ সদৃশ।

$$\text{এবং } \therefore \frac{\text{খগ}}{\text{কগ}} = \frac{\text{ঙঘ}}{\text{কঘ}} \quad (৩, \text{উঃ প্রঃ ৩})।$$

$$\therefore \text{খগ} \cdot \text{কঘ} = \text{কগ} \cdot \text{ঙঘ}।$$

$$\text{অতএব কখ} \cdot \text{গঘ} + \text{কঘ} \cdot \text{খগ} = \text{কগ} \cdot \text{খঙ} + \text{কগ} \cdot \text{ঙঘ} \\ - \text{কগ} \cdot \text{খঘ}।$$

তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। নির্দিষ্ট অনুপাতে ঋজুরেখার বিভাগ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-১।

একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখা ভিতরে এবং বাহিরে
নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত কর ।



মনে কর কখ নির্দিষ্ট । , এবং গঃ ঘ, নির্দিষ্ট অমুপাত ।

কখকে গঃ ঘ অমুপাতে বিভক্ত করিতে হইবে ।

ক হইতে যে কোন । কঙ টান,

এবং কচ=গ (গ ও ঘ'র মধ্যে বৃহত্তর)

চঙ=ঘ=চঙ', অঙ্কিত কর,

এবং চজ ॥ ওখ, চজ' ॥ ওখ' টান ।

তাহা হইলে জ ও জ'ইষ্ট হেদবিন্দু হইবে ।

কাবণ, ∴ চজ ॥ ওখ, এবং চজ' ॥ ওখ' ।

∴ কজ = কচ = গ = কচ = কজ'
খজ = চঙ = ঘ = চঙ' = খজ'

(৩, উঃ প্রঃ ১) ।

২। চতুর্থ, তৃতীয়, ও মধ্য সমানুপাতী নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ২।

তিনটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের স্থান চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।



মনে কর ক, খ, গ'র চতুর্থসমানুপাতী নির্ণয় কবিত্তে হইবে।

যে কোন দুটি সম্পাতী । ওঘ, ওঙ অঙ্কিত কব।

ওচ=ক, চঘ=খ, ওজ=গ, অঙ্কিত কব।

চজ যোগ কব, এবং ঘহ ॥ চজ টান।

তাহা হইলে জহ ইষ্ট চতুর্থ সমানুপাতী হইবে।

কারণ, \therefore চজ ॥ ঘহ,

$$\therefore \frac{ওচ}{চঘ} = \frac{ওজ}{জহ}, \text{ অথবা, } \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{জহ}।$$

অনুমান । ঐরূপে ক এবং খ'র তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করা যাইতে পারে, যদি ওজ=খ' অঙ্কিত করা যায়। এবং তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ} = \frac{খ'}{জহ} \text{ হইবে।}$$

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩ ।

দুটি নির্দিষ্ট ঋজু রেখার মধ্য সমানুপাতী
নির্ণয় কর ।



মনে কব ক এবং ঋ'ব মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে ।

বে কোন । গঘ লইয়া গঙ = ক, ওঘ = ঋ অঙ্কিত কর ।

গঘ'ব উপর অঙ্কিত গচঘ অঙ্কিত কর ।

এবং গঘ'ব উপর ওচ \perp টান ।

ওচ ইষ্ট মধ্যসমানুপাতী হইবে ।

কারণ, চগ, চঘ যোগ করিলে দেখা যায়,

\angle গচঘ = সম \angle (২, উঃ প্রঃ ১১),

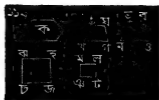
এবং \triangle গচঙ ও \triangle চঘঙ সমানকোণী ও সদৃশ ।

$\therefore \frac{গঙ}{ওচ} = \frac{ওচ}{ওঘ}$ অথবা $\frac{ক}{ওচ} = \frac{ওচ}{ঋ}$ ।

৩। নির্দিষ্ট প্রকারের ও নির্দিষ্ট পরিমাণের ক্ষেত্র অঙ্কিত করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৪।

এরূপ একটি ঋজুর্নৈমিক ক্ষেত্র অঙ্কিত কর
যাহা অপন্ন একটি ঋজুর্নৈমিক ক্ষেত্রের সমান,
এবং আর একটি ঋজুর্নৈমিক ক্ষেত্রের সদৃশ
হইবে ।



মনে কর 'ক'র সমান এবং ঋগ্বৎ'র সদৃশ একটি ঋজুর্নৈমিক ক্ষেত্র
অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ক এবং ঋগ্বৎ'র সমান বর্গ ক্ষেত্র চক্ৰহব, ঐটলয় অঙ্কিত কর
(১, সঃ প্রঃ ১১) ।

এবং ঐট, চক্ৰ, এবং ঋগ্বৎ'র চতুর্থ সমান্তরালী নগ্ন নির্ণয় কর
(৩, সঃ প্রঃ ২) ।

এবং নগ্ন'র উপর ঋগ্বৎ'র সদৃশক্ষেত্র নগ্নবত অঙ্কিত কর
(৩, উঃ প্রঃ ৬, অঃ) । তাহা হইলে নগ্নবত ইষ্ট ক্ষেত্র হইবে ।

কারণ, \therefore ঐট = ঋগ্বৎ (অকন অস্থানে),
চক্ৰ = নগ্ন

\therefore ঐট^২ = ঋগ্বৎ^২ = ঋগ্বৎ'র নগ্নবত (৩, উঃ প্রঃ ৮) ।

কিন্তু ঋগ্বৎ'র নগ্নবত = ঐট^২ । \therefore নগ্নবত = চক্ৰ^২ - ক ।

এবং ক্ষেত্র নগ্নবত ক্ষেত্র ঋগ্বৎ'র সদৃশ ।

টিপ্পনী । একত্রৈখিক ক্ষেত্র অভ্যন্তর সম্বন্ধে এইটি সর্বাপেক্ষা ব্যাপক সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা । এবং ১ম অধ্যায়ের ১১ সম্পাদিত প্রতিজ্ঞা, বাহ্যিক সাক্ষ্য গ্রহণে গ্রহণ করা হইয়াছে, তাহার একটি বিশেষ দৃষ্টান্ত মাত্র ।

৪। নির্দিষ্ট নিম্নমাধীনত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর
নিম্নতস্থান নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫ ।

নির্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট অনুপাতী বাহু
বিশিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর নিম্নতস্থান নির্ণয়
কর ।



নির্দিষ্ট বাহু কথাকে গ ও গ'এতে অন্তবে ও বাহিবে নির্দিষ্ট অস্থাপাতে
বিভক্ত কর, এবং গ'গ'র উপর অর্ধবৃত্ত গ'ঘগ' অঙ্কিত কর ।

এই অর্ধবৃত্ত ইষ্ট নিম্নতস্থান হইবে ।

কারণ, এই অর্ধবৃত্তে যে কোন বিন্দু ঘ লইয়া,

ঘক, ঘখ, ঘগ, ঘগ' যোগ কর, এবং কঘকে উত্তে বর্দ্ধিত কর ।

তাহা হইলে, যদি ঘগ, \angle কঘখ'র সমবিখণ্ডকারী হয়,

তবে ঘগ', \angle খঘগ'র সমবিখণ্ডকারী হইবে,

$\therefore \angle$ গ'ঘগ' অর্ধবৃত্তে থাকায় = সম \angle ।

এবং $\frac{\text{কঘ}}{\text{ঘঘ}} = \frac{\text{কগ}}{\text{ঘগ}} = \frac{\text{কগ'}}{\text{ঘগ'}} = \text{নির্দিষ্ট অস্থাপাত} ।$

কিন্তু যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর ঘগ', \angle কঘখ'র সমবিখণ্ডকারী নহে,
এবং মনে কর \angle খঘগ' = \angle গ'ঘক' ।

ক'ঘকে উ' পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর, তাহা হইলে,

$\therefore \angle$ গ'ঘগ' অর্ধবৃত্তে থাকায় = সম \angle ,

\therefore ঘগ', \angle খঘগ'কে সমবিখণ্ড করিবে ।

∴ $\frac{ক'গ'}{গ'খ} = \frac{গক'}{গখ}$, ∴ $\frac{ক'গু}{গক'} = \frac{গ'খ}{গখ}$ (একান্তর ক্রমে);

এবং $\frac{ক'গ'}{গ'খ} = \frac{ক'গ}{গ'খ}$, ∴ $\frac{ক'গ'}{গ'খ} = \frac{গ'খ}{গ'খ}$ ।

∴ $\frac{ক'গ'}{গক'} = \frac{ক'গ}{গক'}$, ∴ $\frac{গ'গ'}{গক'} = \frac{গ'গ'}{গক'}$, (বিয়োগ ক্রমে) ।

∴ গক' = গক । অতবাং ক ও ক' ভিন্ন নহে ।

৩। বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ যদি এক হয়, তবে বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সম্বন্ধিত সংখ্যা কত হইবে, অথবা পরিধি ও ব্যাসের অনুপাতের সম্বন্ধিত সংখ্যা কত, তাহা নির্ণয় কর ।



পূর্বে বলা হইরাছে (২য় অধ্যায় ৮ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞাতে) যে,
বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\frac{১}{২}$ র গ (যদি র = ব্যাসার্ধ, গ = \bigcirc)

$$= \text{ঘব}^২ \text{ (যদি ঘ} = \frac{\text{গ}}{২\text{র}} \text{)}।$$

আরও বলা হইরাছে $\text{ঘ} > ৩ < ৩\frac{১}{২}$ ।

এক্ষণে ঘ'র মূল্যের সম্বন্ধিত সংখ্যা নির্ণয় করা যাইবে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\text{ঘর}^২ = \text{ঘ}$,

যদি ব্যাসার্ধ, র = ১ হয়।

অতরাং ব্যাসার্ধ = ১ হইলে,

ঘ এর মূল্যের সম্বন্ধিত সংখ্যা = বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সম্বন্ধিত সংখ্যা।

ঘ এর মূল্য নির্ণয়ার্থে নিম্নলিখিত প্রতিজ্ঞা আগে সপ্রমাণ করা আবশ্যক।

যদি বৃত্তের অন্তরস্থিত ও বহিরস্থিত ন সংখ্যক বাহুবিধিষ্ট সমবাহু সমান কোণী বহুভুজের ক্ষেত্রফল অ এবং ই হয়, এবং ২ ন সংখ্যক বাহু বিধিষ্ট ঐ ঐ ঐ ঐ বহুভুজের ক্ষেত্রফল অ' এবং ই' হয়, তাহা হইলে,

$$a' = \sqrt{a_i}, \quad i' = \frac{2i}{i+a'}$$

এই বহুভুজ চতুর্ভুজকেও সংক্ষেপে অ, অ', ই, ই' বলা যাইবে ।

মনে কর, কথ এবং ভিন্ন, অ এবং ই এর বাহু,

আর কব এবং যপ, অ' এবং ই' এর বাহু ।

তাহা হহলে অ এবং ই বেন সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে,

Δ ওকম এবং Δ ওভব যথাক্রমে তাহাদের এক একটির অর্ধেক,

আর অ' এবং ই' যে ২ ন সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে,

Δ ওকব, Δ ওযপ যথাক্রমে তাহাদের মধ্যে এক একটি ।

$$\begin{aligned} \text{অতএব,} \quad \frac{a'}{a} &= \frac{2n\Delta\text{ওকম}}{2n\Delta\text{ওকব}} = \frac{\Delta\text{ওকম}}{\Delta\text{ওকব}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\text{কম}\cdot\text{ওম}}{\frac{1}{2}\text{কম}\cdot\text{ওব}} = \frac{\text{ওম}}{\text{ওব}} \\ &= \frac{\text{ওক}}{\text{ওভ}} = \frac{\Delta\text{ওকব}}{\Delta\text{ওভব}} = \frac{2n\Delta\text{ওকব}}{2n\Delta\text{ওভব}} \\ &= \frac{a'}{i}. \quad \therefore a^2 = a_i, \end{aligned}$$

$$\therefore a' = \sqrt{a_i}.$$

$$\begin{aligned} \text{আবার,} \quad \frac{y}{x} &= \frac{\text{ওভ}}{\text{ওব}} \quad (\because \angle \text{যওভ} = \angle \text{যওব}) \\ &= \frac{\text{ওভ}}{\text{ওক}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta\text{ওযভ}}{\Delta\text{ওযব}} = \frac{\Delta\text{ওভব}}{\Delta\text{ওকব}} = \frac{2n\Delta\text{ওভব}}{2n\Delta\text{ওকব}} = \frac{i}{a'}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{i+a'}{a'} &= \frac{\Delta\text{ওযভ} + \Delta\text{ওযব}}{\Delta\text{ওযব}} \\ &= \frac{\Delta\text{ওভব}}{\Delta\text{ওযব}} = \frac{2n\Delta\text{ওভব}}{2n\Delta\text{ওযব}} = \frac{2i}{i'}. \end{aligned}$$

$$\text{অতএব } \frac{ই'}{ই+অ'} = \frac{২ইঅ'}{ই+অ'}$$

যদি $r = ১$, এবং $n = ৪$,

তাহা হইলে, $অ = ২$, $ই = ৪$,

এবং $\therefore অ' = \sqrt{অ \cdot ই} = \sqrt{৮} = ২.৮২৮৪২৭১$

$$\frac{ই'}{ই+অ'} = \frac{২ইঅ'}{ই+অ'} = \frac{১৬}{৪+২.৮২৮৪২৭১} = ৩.৩১৩৭০৮৫$$

এই প্রণালীতে চলিলে নিম্নের সংখ্যাশ্রেণি পাওয়া যাইবে।—

বাহ্যর সংখ্যা অন্তর্ভুক্ত বহুভুজের ক্ষেত্রফল বহির্ভুক্ত বহুভুজের ক্ষেত্রফল

৪	২.০০০০০	৪.০০০০০
৮	২.৮২৮৪২	৩.৩১৩৭০
১৬	৩.০৬১৪৬	৩.১৮২৫২
৩২	৩.১২১৪৪	৩.১৫১৭২
৬৪	৩.১৩৬৫৪.০	৩.১৪৪১১
১২৮	৩.১৪০০৩	৩.১৪২২২
২৫৬	৩.১৪১২৭.০	৩.১৪১৭৫
৫১২	৩.১৪১৫১	৩.১৪১৬৩
১০২৪	৩.১৪১৫৭.০	৩.১৪১৬০
২০৪৮	৩.১৪১৫৮.০	৩.১৪১৫২
৪০৯৬	৩.১৪১৫২	৩.১৪১৫২

অতএব দেখা যাইতেছে ব্যাসার্ধ যদি ১ হয় তাহা হইলে সমবাহু সমান-কোণী ৪.০৯৬ বাহুবৃত্ত অন্তর্ভুক্ত ও বহির্ভুক্ত বহুভুজের ক্ষেত্রফল জাপক সংখ্যাঘরের দশমিকের ৫ম ঘর পর্যন্ত কোন প্রভেদ নাই, অর্থাৎ সেই সংখ্যাঘরের প্রভেদ ১ এর অথবা ব্যাসার্ধের বর্গের $\frac{১}{১০০০০০}$ ভাগের ন্যূন।

আর যখন বৃত্তের ক্ষেত্রফল উক্ত বহুভুজঘরের ক্ষেত্রফলের মধ্যবর্তী, তখন ঐ ক্ষেত্রফলঘরের যে কোনটির ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলের প্রভেদ আরও ন্যূন।

অতএব যদি দশমিকের ৫ ঘর পর্যন্ত অপেক্ষা অধিক স্থান গণনার প্রয়োজন না হয়, তাহা হইলে ৩'১৪১৫২ এই সংখ্যা ১ ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল বলিয়া লওয়া বাইতে পারে, এবং পরিধি ও ব্যাসার্দ্ধের অনুপাত জ্ঞাপক সংখ্যা বলিয়াও লওয়া বাইতে পারে ।

উপবের প্রদর্শিত প্রণালীতে আরও অধিক দূর চলিলে, যতদূর ইচ্ছা গণনার সূক্ষ্মতা রক্ষা করা বাইতে পারে ।

টিপ্পনী ১ । উপরে যাহা বলা হইল তাহা লিখান্বয়ের জ্যামিতির ৪র্থ অধ্যায়ের ১৩ ও ১৪ প্রতিজ্ঞা হইতে (কিঞ্চিৎ পরিবর্তিত আকারে) গৃহীত হইয়াছে ।

টিপ্পনী ২ । এই প্রতিজ্ঞার মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্দ্ধের অনুপাত নিত্য, অর্থাৎ সকল বৃত্তেই সমান । একবার সত্যতা স্পষ্ট দেখা বাইতেছে, এবং সহজেই সঙ্গমাণ করা বাইতে পারে ।

মনে কব, ব এবং ব' ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্তে ন সংখ্যক বাহ বিশিষ্ট সমবাহ সমানকোণী দুটি বহুভুজ অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে, এবং প্রত্যেক বহুভুজের দুটি পব পব কোণ বিন্দু কেন্দ্রেব সহিত যোগ করা হইয়াছে । তাহা হইলে, যে ত্রিভুজঘর অঙ্কিত হইল তাহার। স্পষ্টই সমানকোণী এবং সদৃশ । অতএব যদি বহুভুজঘরের বাহ অ এবং অ' হয়, তাহা হইলে ব র' অ অ' ন অ ন অ', ন এর মূল্য যতই হউক । কিন্তু ন এর মূল্য অসীম বৃহৎ হইলে, অ, অ' এব মূল্য অসীম ক্ষুদ্র হইবে, এবং বহু ভুজঘরের পরিধি, ন অ এবং ন অ', বৃত্তঘরের পরিধির সমান হইবে । অতএব,

$$\frac{১ম বৃত্তের পরিধি}{২য় বৃত্তের পরিধি} = \frac{ব}{ব'}, \text{ অথবা}$$

$$\frac{১ম বৃত্তের পরিধি}{২য় বৃত্তের পরিধি} = \frac{২য় বৃত্তের পরিধি}{১ম বৃত্তের পরিধি} ,$$

চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণমালা ।

১। একই সমান্তরের অন্তর্গত ত্রিভুজ সকল তাহাদের ভূমির সমানুপাতী ।

২। দুইটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখার অন্তর্গত প্রত্যেক ঋজুরেখাকে, তদ্বাচ্য ছেদিত প্রথমোক্ত রেখাঘরের খণ্ডের অনুপাতে যে বিন্দু বিভক্ত করে, তাহাব নিম্নতস্থান নির্ণয় কর ।

৩। যদি কোন চতুর্ভুজের দুই বাহু সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহাব অপর বাহুঘরের মধ্যবিন্দুর যোজক তাহার সমান্তর বাহুর সহিত সমান্তর ।

৪। নির্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট অনুপাতী বাহুর ও নির্দিষ্ট শীর্ষকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত কব ।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, কর্ণ একত্র দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে যে, ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু, কর্ণ ও সংলগ্ন কর্ণখণ্ডের মধ্যানুপাতী হইবে ।

৬। যদি দুটি বৃত্তে দুটি সমান্তর ব্যাসার্ধ টানা যায়, তাহা হইলে তাহাষের প্রান্তযোজক ঋজুরেখা উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে তাহা বৃত্তদ্বয় হইতে সদৃশ বৃত্তখণ্ড ছেদিত করিবে, এবং সেই বৃত্তখণ্ডের জ্যাঘর বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমানুপাতী হইবে ।

৭। কোন ত্রিভুজ, শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত টানা ঋজুরেখাঘরা দ্বিখণ্ড হইলে, সেই খণ্ডদ্বয়ের বহিরস্থিত বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ, ত্রিভুজের বাহুঘরের সমানুপাতী হইবে ।

৮। অসমান বৃত্তে, কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ সমান সমান কোণ যে যে চাপের উপর দণ্ডায়মান, তাহাদের জ্যা তত্তৎ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমানুপাতী ।

৯। অসমান বৃত্তে সদৃশ বৃত্তখণ্ড যে যে জ্যার উপর দণ্ডায়মান, তাহাব তত্তৎ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমানুপাতী ।

১০। সদৃশ ত্রিভুজ সকল তাহাদের বহিরস্থিত বৃত্তের ব্যাসার্ধের বর্গের সমানুপাতী ।

১১। একটি ত্রিভুজকে তাহার কোন এক বাহুর সমান্তর ঋজুরেখাধারা সমবিধগু কর।

১২। বৃত্তের অন্তরঙ্কিত সমবাহ সমাকোণী বড় ভূজের ক্ষেত্রফল বহিরঙ্কিত ঐ রূপ বড় ভূজের ক্ষেত্রফলের ত্রিচতুর্থাংশ।

১৩। যদি কোন সমাকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় ক্রমাগত সমান্তরপাতী হয়, তাহা হইলে তাহার সমাকোণ হইতে কর্ণের উপর পতিত লম্ব কর্ণকে এক্ষেপে বিভক্ত করিবে যে, তাহার বৃহত্তর খণ্ড, কর্ণ ও ক্ষুদ্রতর খণ্ডের মধ্যান্ত্রপাতী হইবে।

১৪। যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করে, তাহা হইলে তাহাদের সাধাবণ স্পর্শিনী তাহাদের ব্যাসদ্বয়ের মধ্যান্ত্রপাতী হইবে।

চতুর্থ অধ্যায় ।

সমতল ও ঘনায়তন ।

প্রথম পরিচ্ছেদ ।

পরিভাষা ।

উপক্রমণিকা। পূর্ববর্তী তিন অধ্যায়ে একই সমতলস্থিত বিন্দু রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রের বিষয় আলোচিত হইয়াছে । এই অধ্যায়ে তিন সমতলস্থিত বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রের বিষয় আলোচনা হইবে ।

পরিভাষা ১। যদি কোন ঋজুরেখা কোন সমতলস্থিত বিন্দু ঋজুরেখা তৎসহ সংলগ্ন হয় তাহাদেব প্রত্যেকের সহিত সমকোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে তাহাকে সেই সমতলের লম্ব বলে ।

২। যদি দুই সমতলের ছেদক রেখার উপর তদ্ব্যতীত এক সমতলে লম্ব টানিলে তাহা অপর সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে সেই দুই সমতলের এক সমতলকে অপর সমতলের লম্ব বলে ।

৩। একটি ঋজুরেখা যে কোন বিন্দু হইতে একটি সমতলের উপর লম্ব টানিলে, ঐ লম্ব ও ঋজুরেখা যে যে বিন্দুতে সমতলের সংলগ্ন, তত্ত্ব বিন্দুর যোজক ঋজুরেখা ও প্রথমোক্ত ঋজুরেখার অন্তর্গত হইয়া কোণকে সমতলের উপর ঐ ঋজুরেখার অবনতি বলে ।

৪। দুই সমতলের পরস্পর ছেদক রেখার যে কোন বিন্দু হইতে তদুপর একটি লম্ব এক সমতলে ও আর একটি অপর সমতলে টানিলে সেই লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত হইয়া কোণকে এক সমতলের উপর অপর সমতলের অবনতি অথবা দ্বিভূমিক কোণ বা দ্বিপৃষ্ঠ কোণ বলে ।

৫। সমান্তর সমতল তাহাদিগকে বলে, যে সকল সমতল বস্তুদ্বারা ইচ্ছা বদ্ধিত করিলেও মিলিত হয় না।

৬। দুইএর অধিক ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থিত কোণসমূহ এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে **ঘনকোণ** বলে।

তাহা তিন, চারি, অথবা ততোধিক সমতলস্থ কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইলে তাহাকে যথাক্রমে, **ত্রিভুজিক** বা **ত্রিপৃষ্ঠ্য**, **চতুর্ভুজিক** বা **চতুষ্পৃষ্ঠ্য**, অথবা **বহুভুজিক** বা **বহুপৃষ্ঠ্য**, কোণ বলে।

যে ঘনকোণের ভূমিগুলি বা পৃষ্ঠগুলি একটি সমতলদ্বারা ছেদিত হইলে ছেদক ক্ষেত্রে একটিও বিকল্প বা উল্টা কোণ থাকে না, তাহাকে **সুভূজ** ঘনকোণ বলে।

৭। যে বহুপৃষ্ঠ ঘনায়তন কতকগুলি সমতল ক্ষেত্রেব একত্র যোগে উৎপন্ন যে তন্মধ্যে **ভূমি** বলিয়া অভিহিত একটি ভিন্ন অপর ক্ষেত্রগুলি সমস্ত **শীর্ষ বিন্দু** নামক এক বিন্দুতে মিলিত, তাহাকে **সূচী** বলে।

৮। যে বহুপৃষ্ঠ ঘনায়তনের চই পৃষ্ঠ (বাহাদের **ভূমি** বলে) সমান্তর সদৃশ ও সমান ঋজুৈরিক ক্ষেত্র, এবং অপর পৃষ্ঠগুলি (বাহাদের **পার্শ্ব-পৃষ্ঠ** বলে) সামান্তরিক, তাহাকে **ফলক** বলে। এবং যদি পার্শ্বপৃষ্ঠগুলি ভূমির লম্ব হয়, তাহা হইলে ফলকে **সোজা** ফলক বলে।

৯। যে ফলকের ভূমিদ্বয় দুটি সামান্তরিক তাহাকে **সামান্তরিক** পৃষ্ঠ বলে।

১০। ব্যাসকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্পার্শ্বে বৃত্তাক্ষেপ ঘূর্ণমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **গোলক** বা **বস্তু** বলে।

১১। আরতের এক বাহু স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্পার্শ্বে আরতকে ঘূর্ণমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **সোজা স্তম্ভ** বলে।

১২। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন এক বাহুকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্পার্শ্বে ত্রিভুজকে ঘূর্ণমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয় তাহাকে **সোজা স্তম্ভসূচী** বলে।

১৩। চারিটি সমান সমবাহু ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন আরতনকে **চতুষ্পৃষ্ঠ** বলে।

১৪। ছয়টি সমান বর্গক্ষেত্র অর্থাৎ সমবাহ সমকোণী চতুর্ভুজের যোগে উৎপন্ন ঘনায়তনকে **অন্যক্ষেত্র** বা **অষ্টপুষ্ঠ** বলে।

১৫। যে ঘনায়তন আটটি সমান সমবাহ ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন, তাহাকে **অষ্টপুষ্ঠ** বলে।

১৬। যে ঘনায়তন দ্বাদশটি সমান সমবাহ সমানকোণী পঞ্চভুজের যোগে উৎপন্ন, তাহাকে **দ্বাদশপুষ্ঠ** বলে।

১৭। যে ঘনায়তন বিংশতি সমান সমবাহ ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন তাহাকে **বিংশতিপুষ্ঠ** বলে।

১৮। কোন ঋজুবেদ্যস্থিত বিন্দুসমূহ হইতে কোন সমতলে লম্ব টানিলে লম্বসমূহের পাদবিন্দু নিম্নতস্থানকে সেই সমতলে সেই ঋজুবেদ্যের **প্রক্ষেপণী** বলে।

টিপ্পনী ১। উপরের পরিভাষার কোন কোন স্থলে পরবর্তী প্রতিজ্ঞার সত্যতা মানিয়া লওয়া হইয়াছে। যথা ১ম পরিভাষার মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, একটি ঋজুবেদ্য তৎসংলগ্ন এক সমতলস্থ সমস্ত ঋজুরেখার উপর লম্ব হইতে পারে, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের ৪র্থ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার উপপন্ন করা হইয়াছে। আবার ২য় ও ৪র্থ পরিভাষার মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, দুই সমতলের ভেদরেখা ঋজুরেখা, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সঙ্গোপন করা হইয়াছে। কিন্তু যে যে কথার সত্যতা মানিয়া লওয়া হইয়াছে তাহা অতি সহজ ও স্পষ্ট।

টিপ্পনী ২। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, কোণ একটি বিন্দু দিয়া অসংখ্য ঋজুরেখা টানা যায়, এবং দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট হইলে ঋজুরেখার স্থান নির্দিষ্ট হয়।

ইহাও স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, দুটি বিন্দু দিয়া অর্থাৎ তাহাদের যোজক ঋজুরেখা দিয়া অসংখ্য সমতল অঙ্কিত হইতে পারে, এবং এক ঋজুরেখা নহে একগুণ **তিনটি** বিন্দু নির্দিষ্ট হইলে সমতল নির্দিষ্ট হয়।

এবং **ঋজুরেখা** যেমন তদুপরিস্থ যে কোন **বিন্দুর** চারিদিকে ঘূর্ণিত হইতে পারে, **সমতলও** তেমনি তদুপরিস্থিত যে কোন **ঋজুরেখার** চারিদিকে ঘূর্ণিত হইতে পারে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। এক সমতলস্থ ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১।

কোন ঋজুরেখার একাংশ এক সমতলে এবং অপরাংশ তাহার বাহিরে থাকিতে পারেনা।



যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর

| কথ'প'ব একাংশ কথ' সমতল ব'তে

অপরাংশ থ'গ' তাহার বাহিরে।

যখন | কথ' সমতল ব'তে,

তখন তাহা সেই সমতলে বর্দ্ধিত হইতে পারে (১, স্বী: ক: ২)।

মনে কর | কথ', ঘ' পর্যন্ত বর্দ্ধিত হইল।

তাহার প'ব মনে কর সমতল ব, ক'ঘ'ব উপর ঘূ'বান হইল যতক্ষণ না তাহা প'তে সংলগ্ন হয়।

তাহা হইলে | কথ'প' এবং | কথ'ঘ' ইহার

আংশিকভাবে মিলিত হইল,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না (১, স্ব: সি: ১০)।

টিপ্পনী। এ প্রতিজ্ঞার সত্যতা সমতলের লক্ষণ ও ১০ স্বতঃ সিদ্ধ হইতে পাষ্ট দেখা

যায়।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২ ।

১। দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা এক, এবং কেবল একমাত্র সমতলে থাকিবে ।

২। এবং তিনটি পরস্পর সম্পাতী কিন্তু একলিন্দুগামী মহে একরূপ ঋজুরেখা একই সমতলে থাকিবে ।



১। মনে কর কখ, গঘ চটি সম্পাতী । বাহাদের সম্পাতবিন্দু ঙ ।

তাহা হইলে কখ, গঘ এক এবং কেবল এক মাত্র সমতলে থাকিবে ।

মনে কর সমতল ব, ঋজুরেখা কখকে ধাবণ করিতেছে ।

সমতল ব'কে কখ'র উপর ঘূর্ণাও যতদূর না তাহা গ'র সংলগ্ন হয় ।

তাহা হইলে যখন গ ও ঙ সেই সমতলে,

তখন গঙঘ সমস্তই সেই সমতলে । (২, উঃ প্রঃ ১) ।

আর কখ, গঘ অন্য কোন সমতলে থাকিতে পারে না ।

যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর তাহাবা ব' সমতলে আছে ।

ব' সমতলে যে কোন বিন্দু স লইয়া । সম্মুখ তান,

এবং মনে কর । সম্মুখ, । কখ, এবং । গঘ'কে

স্ব এবং শ' তে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে ∴ স্ব এবং শ, । কখ, এবং । গঘতে আছে,

∴ স্ব এবং শ সমতল ব'তে আছে ।

∴ । সম্মুখ সমতল ব'তে,

এবং ∴ বিন্দু স, সমতল ব'তে ।

ঐরূপে দেখান যাইতে পারে ব' এর

অন্ত যে কোন বিন্দু লইলে তাহা সমতল ব'তে ।

অতএব সমতল ব' সমতল ব হইতে ভিন্ন নহে ।

২। মনে কর কখ, কঘ, ঘগ তিনটি সম্পাতী । ,

এবং ক, ঘ, ঙ তাহাদের ছেদবিন্দু ।

তাহারা একই সমতলে আছে ।

কারণ, পূর্ব প্রদর্শিত মতে

কখ, গঘ একই সমতল ব'তে ।

এবং ∴ ক এবং ঘ সেট সমতলে,

∴ | কঘ সেই সমতলে ।

টিপ্পনী । এই প্রতিজ্ঞা হইতে দেখা যাইবে তিনটি বিন্দু বাহা এক সরুরেখা নহে, অথবা দুটি সম্পাতী সরুরেখা, সমতলেব স্থান নির্দিষ্ট করিয়া বের ।

২। দুই সমতলের ছেদ রেখা ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

যদি দুটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করে,
তাহা হইলে তাহাদের ছেদ রেখা একটি সরু-
রেখা ।



মনে কর সমতল ব এবং সমতল ব

কখ রেখার পরস্পরকে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে কখ একটি ।।

কারণ যদি তাহা না হয়, ক এবং খ'কে

ব এবং ব' দুই সমতলে । কগখ, | কগ'খ ধারা

যোগ করা যাইবে,

এবং তাহারা স্থান বেটন করিবে ।

কিন্তু তাহা হইতে পারে না ।

অতএব কখ একটি সরু রেখা ।

৩। সমতলের উপর লম্ব ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৪।

যদি কোন ঋজুরেখা দুটি সম্পাতী ঋজুরেখার সম্পাত বিন্দুতে তাহাদের উভয়ের উপর লম্ব হয়, তবে সেই ঋজুরেখা তৎসংলগ্ন এবং উক্ত রেখাভয়ের সমতলস্থ প্রত্যেক ঋজুরেখার উপর লম্ব হইবে। অর্থাৎ সেই সমতলের উপর লম্ব হইবে।



মনে কর $\text{কও} \perp \text{খও} \text{ \& } \text{গওঘ}$ ।

তাহা হইলে $\text{কও} \perp$ যে কোন চওজ ।

ওখতে যে কোন বিন্দু খ লইয়া, ওগ, ওঘ, ওঙ = ওখ করিয়া টান, খগ, ঘঙ, যোগ কর, এবং মনে কর

তাহাবা চওজকে চ এবং জ'তে ছেদ কবিয়াছে।

খ, গ, ঘ, ও, চ, জকে ক'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে, $\Delta \text{খওগ}$ এবং $\Delta \text{ওওঘতে}$,

$\therefore \text{ওখ} = \text{ওঙ}$, $\text{ওগ} = \text{ওঘ}$, এবং $\angle \text{খওগ} = \angle \text{ওওঘ}$,

$\therefore \text{খগ} = \text{ওঘ}$, এবং $\angle \text{ওখগ} = \angle \text{ওওঘ}$ (১, উঃ প্রঃ ১২)।

আবার, $\Delta \text{খওচ}$ এবং $\Delta \text{ওওজ}$ তে,

$\therefore \angle \text{খওচ} = \angle \text{ওওজ}$, $\angle \text{ওখচ} = \angle \text{ওওজ}$,

এবং $\text{ওখ} = \text{ওঙ}$,

$\therefore \text{খচ} = \text{ওজ}$, $\text{ওচ} = \text{ওজ}$ (১, উঃ প্রঃ ১৪)।

এবং \therefore $\triangle OAB$ এবং $\triangle OAC$ এর সমবিকৃতকারী সম, \therefore

\therefore $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle OAB = \angle OAC$ । এবং $\angle OAC = \angle OAB$ ।

\therefore $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ হইতে $\angle AOB = \angle AOC$ ।

এবং $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ হইতে, $OB = OC$ ।

অতএব $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ তে,

$\angle AOB = \angle AOC$, $OB = OC$ উভয়েতে আছে, এবং $OA = OA$, \therefore

\therefore $\angle AOB = \angle AOC$ (১, উঃ প্রঃ ১০)

$=$ সম \angle ।

\therefore $OB \perp AC$, এবং \therefore OB সমতল $\triangle ABC$ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩ ।

অদি ভিন্ন দ্বা ততোধিক একবিন্দুগামী
স্বতন্ত্রেধার সম্পাত বিন্দুতে তাহাদের একটি
সাধারণ মধ্য থাকে তবে তাহারা একই
সমতলস্থ ।



মনে কর \angle ওক \perp ওখ, ওগ, ওঘ ।

তাহা হইলে, ওখ, ওগ, ওঘ একই সমতলস্থ ।

কারণ, যদি তাহা না হয়, মনে কর, ওঘ,

ওখ এবং ওগ হইতে ভিন্ন সমতলে,

এবং সমতল খওগ, সমতল কওঘ কে ওঙ তে ছেদ করিতেছে ।

তাহা হইলে ওঙ সমতল খওগ তে স্থিত ।

এবং \therefore ওক \perp ওখ এবং ওগ,

\therefore ওক \perp ওঙ (৪, উঃ প্রঃ ৪) ।

$\therefore \angle$ কওঙ = সম \angle = \angle কওঘ (করনানুসারে) ।

কিন্তু তাহা হইতে পারে না, \therefore ওক, ওঘ, ওঙ,

একই সমতলে, এবং \angle কওঘ $<$ \angle কওঙ,

যদি ওঙ এবং ওঘ মিলিত না হয় ।

অতএব ওঙ এবং ওঘ ভিন্ন মনে ।

এবং \therefore ওঘ, ওখ এবং ওগ'র সহিত একই সমতলস্থ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

১। যদি দুটি ঋজুরেখা সমান্তর হয়, এবং তন্মধ্যে একটি কোন সমতলের লম্ব হয়, তবে অপনতিও সেই সমতলের লম্ব হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি দুটি ঋজুরেখার একটি কোন সমতলের লম্ব হয়, এবং অপনতিও সেই সমতলের লম্ব হয়, তবে সেই রেখা দুটি সমান্তর হইবে।



১। মনে কর কখ ॥ গঘ এবং \perp সমতল ব।

তাহা হইলে গঘ \perp সমতল ব।

মনে কর কখ এবং গঘ, খ এবং ঘ'তে সমতল ব'র সংলগ্ন।

খঘ যোগ কর, সমতল ব'তে ঘঙ \perp খঘ টান,

এবং ঘঙ তে যে কোন বিন্দু উ লইয়া, কঙ, খঙ, ঘক যোগ কর।

তাহা হইলে $কঙ^2 = কখ^2 + খঙ^2$ ($\because \angle কখঙ =$ সম \angle , কন্মনাসূত্রে)

$= কখ^2 + খঘ^2 + ঘঙ^2$ ($\because ঘঙ \perp খঘ$

(অঙ্কনানুসারে)

$= কঘ^2 + ঘঙ^2$ ($\because \angle কখঘ =$ সম \angle , কন্মনাসূত্রে)।

$\therefore ঘঙ \perp ঘক$ (১, উঃ প্রঃ ২২)। এবং ঘঙ \perp ঘখ।

$\therefore ঘঙ \perp$ সমতল ঘকখ (৪, উঃ প্রঃ ৪)।

এবং কখ ॥ গঘ, \therefore গঘ, সমতল ঘকখ তে স্থিত।

$\therefore ঘঙ \perp$ গঘ।

আবার, $\text{গঘ} \parallel \text{কখ}$, এবং $\angle \text{কখঘ} = \text{সম} \angle$,

$\angle \text{গঘখ} = \text{সম} \angle$, এবং $\therefore \text{গঘ} \perp \text{খঘ}$ ।

$\therefore \text{গঘ} \perp \text{খঘ}$ এবং ঘঙ , এবং $\therefore \perp \text{সমতল ব}$ ।

২। মনে কর কখ এবং $\text{গঘ} \perp \text{সমতল ব}$ ।

তাহা হইলে $\text{কখ} \parallel \text{গঘ}$ ।

পূর্বমত চিত্র অঙ্কিত করিলে,

$\text{কঙ}^2 = \text{কখ}^2 + \text{খঙ}^2 = \text{কখ}^2 + \text{খঘ}^2 + \text{ঘঙ}^2 = \text{কঘ}^2 + \text{ঘঙ}^2$ ।

$\therefore \text{ঘঙ} \perp \text{কঘ}$ । এবং $\text{ঘঙ} \perp \text{খঘ}$ (অকনামুসাবে)।

এবং $\text{ঘঙ} \perp \text{গঘ}$ (কল্পনামুসারে)।

$\therefore \text{ঘঙ} \perp \text{গঘ, কঘ, খঘ}$ ।

এবং $\therefore \text{গঘ, কঘ এবং খঘ}$ 'র সহিত এক সমতলস্থ (২, উঃ প্রঃ ৫)।

$\therefore \text{গঘ এবং কখ}$ এক সমতলস্থ।

এবং $\angle \text{কখঘ} = \text{সম} \angle = \angle \text{গঘখ}$ ।

$\therefore \text{কখ} \parallel \text{গঘ}$ (১, উঃ প্রঃ ৬)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৭।

কোন সমতলের বাহিরের কোন বিন্দু হইতে সমতল পর্য্যন্ত ষত ঋজুরেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে সমতলের উপর লম্বই ক্ষুদ্রতম। এবং সেই বিন্দু হইতে টানা অপর ঋজুরেখার মধ্যে যাহারা লম্বের পদ হইতে সমান দূরে সমতলে সংলগ্ন, তাহারা পরস্পর সমান।



মনে কর $\text{কখ} \perp$ সমতল ব, কর্গ অপর ।,

এবং কঘ আর একটি । একপে টানা হইয়াছে যে, খর্গ = খঘ ।

তাহা হইলে $\text{কখ} < \text{কর্গ}$, এবং $\text{কর্গ} = \text{কঘ}$ ।

কারণ, $\angle \text{কখর্গ} = \text{সম} \angle$ এবং $\therefore > \angle \text{কগখ}$,

$\therefore \text{কর্গ} < \text{কখ}$ (১, উঃ প্রঃ ১০)।

এবং $\triangle \text{কখর্গ}$, $\triangle \text{কখঘ}$ তে, খর্গ = খঘ, খক উভয়েতেই আছে,

এবং $\angle \text{কখর্গ} = \text{সম} \angle = \angle \text{কখঘ}$,

$\therefore \text{কর্গ} = \text{কঘ}$ (১, উঃ প্রঃ ১২)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা ১ম অধ্যায়ের ১০ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুরূপের অনুরূপ।

৪। স্থানে সমান্তর ক্ষতুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৮।

যে সকল যথাতথাস্থিত ক্ষতুরেখা, অর্থাৎ সকলে এক সমতলস্থিত না হইয়াও, কোন একটি ক্ষতুরেখার সমান্তর হয়, তাহারা দুটি দুটি করিয়া পরস্পর সমান্তর।



মনে কর যথাতথাস্থিত। কখ এবং। গঘ ॥ ৩৮।

তাহা হইলে কখ ॥ গঘ।

৩৮'র কোন বিন্দু জ হইতে

৩৮ ও কখ'র সমতলে জহ \perp ৩৮,

এবং ৩৮ ও গঘ'র সমতলে জক \perp ৩৮, টান।

তাহা হইলে \therefore ৩৮ \perp জহ, জক,

\therefore ৩৮ \perp সমতল হজক (৪, উ: প্র: ৪)।

এবং \therefore কখ ॥ ৩৮,

\therefore কখ \perp সমতল হজক (৪, উ: প্র: ৬)।

সেই কারণেই গঘ \perp সমতল হজক।

\therefore কখ ॥ গঘ (৪, উ: প্র: ৬)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা ১, উ: প্রতিজ্ঞা ৭ এর অনুরূপ।

৩। সমতলে ঋজুরেখার প্রক্ষেপণী ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-৯।

সমতলে ঋজুরেখার প্রক্ষেপণী একটি ঋজুরেখা ।



মনে কর কখ একটি | , ব একটি সমতল ।
 তাহা হইলে ব'র উপর কখ'র প্রক্ষেপণী একটি | ।
 মনে কর কর্গ, খঘ \perp ব,
 তাহা হইলে কর্গ \parallel খঘ (৮, উঃ প্রঃ ৬),
 এবং \therefore কর্গ, খঘ একই সমতল স'তে স্থিত ।
 এবং | কখ ও সেই সমতল স'তে, \therefore ক ও খ, স'তে স্থিত ।
 মনে কর সমতল ব ও সমতল স'র ছেদরেখা গঘ,
 তাহা হইলে গঘ একটি | (৯, উঃ প্রঃ ৩),
 এবং গঘ, ব সমতলের উপর কখ'র প্রক্ষেপণী ।
 কারণ, কখ'র যে কোন বিন্দু ঙ হইতে স সমতলে ঙচ \perp গঘ টান,
 তাহা হইলে ঙচ \parallel কর্গ, এবং \therefore \perp সমতল ব,
 অর্থাৎ সমতল ব'তে চ, ঙ'র প্রক্ষেপণী ।
 এবং ঐরূপে সপ্রমাণ হইবে,
 কখ'র অন্য যে কোন বিন্দুর প্রক্ষেপণী গঘ তে থাকিবে ।
 আবার, গঘ'র প্রত্যেক বিন্দুই কখ'র কোন এক বিন্দুর প্রক্ষেপণী ।
 কারণ, গঘ'র যে কোন বিন্দু জ হইতে স সমতলে জহ \parallel কর্গ টান,
 তাহা হইলে জহ \perp ব (৮, উঃ প্রঃ ৬),
 \therefore ব সমতলে জ, হ'র প্রক্ষেপণী ।

৬। পরস্পরের লম্ব ও সমান্তর ঋজুরেখা
ও সমতল।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

যদি কোন সমতলের বাহিরে স্থিত একটি ঋজুরেখা সেই সমতলের ভিতরে স্থিত কোন ঋজুরেখার সমান্তর হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত ঋজুরেখা সেই সমতলের সমান্তর হইবে।



মনে কর সমতল ব'র বাহিরে স্থিত | কখ || ব'তে স্থিত | গঘ।

তাহা হইলে কখ || সমতল ব।

কারণ, ∴ কখ || গঘ,

∴ কখ ও গঘ একই সমতল স'তে স্থিত।

এবং সমতল স ও সমতল ব'র ছেদ রেখা গঘ।

অতএব যদি কখ বর্জিত করিলে সমতল ব তে মিলে,

তাহাদের সঙ্গাতবিন্দু অবশ্যই সমতল ব ও সমতল স'র

ছেদরেখা গঘ'তে থাকিবে,

অর্থাৎ কখ, গঘ'র সহিত মিলিবে।

কিন্তু তাহা অসম্ভব, ∴ কখ || গঘ।

∴ | কখ ও সমতল ব মিলিতে পারে না।

এবং ∴ | কখ || সমতল ব।

উপপাদ্য—প্রতিভা—১১।

যদি কোন ঋজুরেখা কোন সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে সেই ঋজুরেখা দ্বিত্ব যে কোন সমতল বাইবে তাহা প্রথমোক্ত সমতলের লম্ব হইবে।



মনে কব । $কখ \perp$ সমতল ব,
 তাহা হইলে । $কখ$ দিয়া বাইতেছে এরূপ যে কোন সমতল $ম \perp$ সমতল ব।
 কারণ, ব ও ম'র ছেদরেখা $খগ$ 'র যে কোন বিন্দু গ হইতে
 $গঘ \perp$ $খগ$ টান,
 তাহা হইলে $গঘ \parallel কখ$, এবং $কখ \perp ব$,
 $\therefore গঘ \perp ব$ (১, উঃ প্রঃ ৬)।
 সেইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে,
 সমতল ম হিত প্রত্যেক । বাহা \perp $খগ$, তাহা \perp ব,
 অতএব সমতল ম \perp সমতল ব।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

যদি দুটি সংলগ্ন সমতল তৃতীয় একটি সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত সমতলদ্বয়ের ছেদরেখা ঐ তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।



মনে কর সমতল m ও সমতল $n \perp$ সমতল v ।

তাহা হইলে m ও n 'র ছেদরেখা $কখ \perp$ সমতল v ।

কারণ, যদি তাহা না হয়,

m সমতলে $খ$ হইতে $খঙ \perp m$ ও v 'র ছেদরেখা $খগ$ 'র উপর,
এবং n সমতলে $খ$ হইতে $খচ \perp n$ ও v 'র ছেদরেখা $খঘ$ 'র উপর, টান।
তাহা হইলে $খঙ$, $খচ$ উভয়ই \perp সমতল v (৮, পরিভাষা ২)।

কিন্তু তাহা অসম্ভব।

কাবণ, মনে কর $খঙ$, $খচ$ 'র সমতলের সহিত v 'র ছেদরেখা $জহ$,

তাহা হইলে $\angle গখজ = সম \angle = \angle চখজ$,

বাহা কখনই হইতে পারে না। (১, সঃ সিদ্ধ ৮)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৩ ।

যদি দুটি সমান্তর সমতলকে তৃতীয় একটি সমতল ছেদ করে, তবে সেই ছেদরেখাগুলি সমান্তর হইবে ।



মনে কর কখ ও গঘ সমান্তর সমতল ম ও ন'র সহিত

সমতল ব'র ছেদ রেখা ।

তাহা হইলে কখ ॥ গঘ ।

কাবণ, কখ ও গঘ উভয়ই | (খ, উঃ প্রঃ ৩) ।

এবং উভয়ই এক সমতল ব'তে স্থিত ।

আবার এখন কখ ও গঘ দুটি সমান্তর সমতল স্থিত,

তখন তাহারা কখনও মিলিতে পারে না ।

∴ কখ ॥ গঘ ।

টিপ্পনী । সমতল ম হিত কোন ঋজুরেখাই সমান্তর সমতল ন হিত কোন ঋজুরেখার সহিত মিলিতে পারে না । কিন্তু সেই রেখাটির সমান্তর না হইতে পারে । তাহারা সমান্তর হইবে যদি তাহারা একই সমতলে থাকে, অর্থাৎ ম ও ন'র কোন তৃতীয় সমতলের সহিত ছেদ রেখা হয় ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৪ ।

যদি দুটি ঋজুরেখা তিনটি সমান্তর সমতল-
দ্বারা ছেদিত হয়, তাহা হইলে তাহারা সমানু-
পাতে ছেদিত হইবে ।



মনে কব । কখঙ । পঘ, সমান্তর সমতল ম, ন, ব দ্বারা

ক, ঙ, খ, এবং গ, চ, ঘ, তে ছেদিত হইয়াছে ।

তাহা হইলে $\frac{কঙ}{ঙখ} = \frac{গচ}{চঘ}$ ।

কঘ যোগ কর, মনে কব কঘ, ন দ্বারা স'তে ছেদিত,

এবং সঙ, সচ যোগ কর ।

তাহা হইলে, \therefore সমতল ন ॥ সমতল ব,

এবং সমতল কখঘ উভয়কে ছেদ করিতেছে,

\therefore $\frac{ঙস}{সঘ} = \frac{খঘ}{ঘ$ (১৮, উঃ প্রঃ ১০),

এবং \therefore $\frac{কঙ}{ঙখ} = \frac{কস}{সঘ}$ (৩, উঃ প্রঃ ১) ।

আবার, \therefore সমতল ন ॥ সমতল ম,

এবং সমতল কঘগ উভয়কে ছেদ করিতেছে,

\therefore $\frac{সচ}{চগ} = \frac{কগ}{গ$ ।

এবং \therefore $\frac{কস}{সঘ} = \frac{কচ}{চঘ}$ ।

\therefore $\frac{কঙ}{ঙখ} = \frac{কচ}{চঘ}$ ।

অনুমান ১। যদি দুটি সমান্তরী ঋজুরেখা
যথাক্রমে আন দুটি ঋজুরেখার সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে,

(১) প্রথমোক্ত দুটির অন্তর্গত কোণ

অপর দুটির অন্তর্গত কোণের সমান, এবং

(২) প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের সমতল

অপর দুটিরের সমান্তর, হইবে।



মনে কর কখ, কগ যথাক্রমে ॥ ঘঙ, ঘচ।

তাহা হইলে, (১) \angle কখগ = \angle ওঘচ।

কারণ, কখ, কগ = ঘঙ, ঘচ করিয়া টান,

এবং কঘ, খঙ, গচ, খগ, ওচ যোগ কর,

তাহা হইলে, \therefore কখ = এবং ॥ ঘঙ, \therefore খঙ = এবং ॥ কঘ।

এবং, \therefore কগ = এবং ॥ ঘচ, \therefore কঘ = এবং ॥ গচ।

এবং \therefore খঙ = এবং ॥ গচ, \therefore খগ = এবং ॥ ওচ।

$\therefore \triangle$ কখগ ও \triangle ঘঙচ হইতে, \angle কখগ = \angle ওঘচ।

এবং (২) সমতল কখগ ॥ সমতল ঘঙচ।

কারণ, মনে কর, কজ \perp সমতল ঘঙচ,

এবং জহ, জখ ॥ কখ, কগ টান।

তাহা হইলে, \therefore কজ \perp সমতল ঘঙচ,

$\therefore \angle$ কজহ, \angle কজখ = সম \angle ।

এবং \therefore কখ, কগ ॥ জহ, জখ,

$\therefore \angle$ জকখ, \angle জকগ = সম \angle ।

এবং \therefore কজ \perp সমতল কখগ ও সমতল ঘঙচ।

অতএব সমতল কখগ \parallel সমতল ঘঙচ।

কারণ, যদি তাহারা মিলিত হয়, তাহা হইলে,

তাহাদের ছেদরেখার যে কোন বিন্দু হইতে

ক ও জ হইতে ঋকুরেখা টানিলে

তাহারা কজ'র সহিত সম \angle উৎপন্ন করিবে,

এবং এক \triangle এতে দুই সম \angle থাকিবে,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না। (১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ১)।

৭। ত্রিপ্রুষ্ঠা ঘন কোণ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৩ ।

ত্রিপ্রুষ্ঠা ঘন কোণের যে কোন প্রুষ্ঠদ্বয়ের সামান্তলিক কোণদ্বয় একত্র অপর প্রুষ্ঠের সামান্তলিক কোণ অপেক্ষা বড় হইবে ।



মনে কর ও তে স্থিত ত্রিপ্রুষ্ঠা ঘন কোণ
 \angle কঙখ, \angle খঙগ, \angle গওক এই তিনটি
 সামান্তলিক কোণের যোগে উৎপন্ন ।

তাহা হইলে ঐ তিনটির মধ্যে যে কোন দুটি,

\angle কঙখ + \angle কঙগ > \angle খঙগ ।

যদি \angle খঙগ < বা = \angle কঙখ হয়,

তাহা হইলে প্রতিজ্ঞার সত্যতা স্পষ্টই প্রতীয়মান ।

মনে কর \angle খঙগ > \angle কঙখ ।

খঙ রেখার ও'তে \angle খঙঘ = \angle কঙখ অঙ্কিত কর,

ঙখ, ওগ তে খ এবং গ বিন্দু লইয়া খগ টান,

এবং মনে কর খগ, ওঘ কে ঘ তে ছেদ করিতেছে ।

আর ওক = ওঘ করিয়া কখ, কগ যোগ কর ।

তাহা হইলে \triangle ওখক এবং \triangle ওখঘ হইতে,

খক = খঘ (১, উঃ প্রঃ ১২) ।

কিন্তু $\text{খক} + \text{কগ} > \text{খগ}$ (১, উঃ প্রঃ ১১)

অর্থাৎ $> \text{খঘ} + \text{ঘগ}$ ।

∴ $\text{কগ} > \text{ঘগ}$ ।

অতএব $\Delta \text{কঙগ}$ এবং $\Delta \text{ঘঙগ}$ তে,

$\angle \text{ক} = \angle \text{ঘ}$, $\angle \text{গ}$ উভয়েতেই আছে,

কিন্তু $\text{কগ} > \text{ঘগ}$ ।

∴ $\angle \text{কঙগ} > \angle \text{ঘঙগ}$ (১, উঃ প্রঃ ১৬)।

∴ $\angle \text{কঙখ} + \angle \text{কঙগ} > \angle \text{খঙঘ} + \angle \text{ঘঙগ}$

অর্থাৎ $> \angle \text{খঙগ}$ ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৬ ।

যদি দুটি ত্রিভুজ যেন কোণের একের
পৃষ্ঠত্রয়ের সামান্তলিক কোণত্রয় যথাক্রমে
অপর দুই পৃষ্ঠত্রয়ের সামান্তলিক কোণত্রয়ের
সমান হয়, তাহা হইলে যেন কোণত্রয় সমান
হইবে ।



মনে কর ও এবং ও' হিত ত্রিভুজ যেন কোণত্রয়ের

একের পৃষ্ঠ সামান্তলিক কোণত্রয় যথাক্রমে

অপর দুই পৃষ্ঠ সামান্তলিক কোণত্রয়ের সমান ।

তাহা হইলে যেন কোণত্রয় সমান হইবে ।

ওক তে যে কোন বিন্দু ক লইয়া ও'ক' = ওক করিয়া লও ।

ওকখ, ওকগ সমতলে কখ, কগ \perp ওক টান, এবং

মনে কব কখ, কগ, ওখ ওগ'র সহিত খ' এবং গ'তে মিলিত ।

আর ও'ক'খ, ও'ক'গ সমতলে ক'খ, ক'গ \perp ও'ক' টান ।

এবং মনে কর ক'খ' এবং ক'গ', ও'খ' এবং ও'গ'র সহিত

খ' এবং গ'তে মিলিত ।

এবং খ'গ, খ'গ' যোগ কর ।

তাহা হইলে \triangle ওকখ এবং \triangle ও'ক'খ' এতে

$\therefore \angle$ কওখ = \angle ক'ও'খ' (করনানুসারে),

\angle ওকখ = \angle ও'ক'খ' (উভয়েই সম \angle বলিয়া),

এবং ওক = ও'ক' (অনুসারে),

\therefore ওখ = ও'খ' (১, উঃ প্রঃ ১৪), কখ = ক'খ' ।

এরূপে \triangle ওকগ, \triangle ও'ক'গ' হইতে ওগ = ও'গ', কগ = ক'গ' ।

অতএব $\triangle \text{ওখগ}$, $\triangle \text{ও'খ'গ}$ এতে

$\therefore \text{ওখ} = \text{ও'খ}$, $\text{ওগ} = \text{ও'গ}$,

এবং $\angle \text{খওগ} = \angle \text{খ'ও'গ}$ (করনামুসারে),

$\therefore \text{খগ} = \text{খ'গ}$ (১, উ: প্র: ১২) ।

অতএব $\triangle \text{কখগ}$, $\triangle \text{ক'খ'গ}$ এতে $\text{কখ} = \text{ক'খ}$, $\text{কগ} = \text{ক'গ}$,

এবং $\text{খগ} = \text{খ'গ}$,

$\therefore \angle \text{খকগ} = \angle \text{খ'ক'গ}$ (১, উ: প্র: ১৩),

অর্থাৎ পৃষ্ঠ বা সমতল কওগ ’র উপর

পৃষ্ঠ বা সমতল কওখ ’র অবনতি (৪, পরিভাষা ৪)

= পৃষ্ঠ বা সমতল ক'ও'গ ’র উপর পৃষ্ঠ ক'ও'খ ’র অবনতি ।

সেইরূপে দেখা যাইবে,

পৃষ্ঠ খওগ ’র উপর পৃষ্ঠ কওখ এবং পৃষ্ঠ কওগ ’র অবনতি

= পৃষ্ঠ খ'ও'গ ’র উপর পৃষ্ঠ ক'ও'খ এবং পৃষ্ঠ ক'খ'গ ’র অবনতি ।

অতএব যদি পৃষ্ঠা কোণগুলি সমভাবেস্থিত হয়,

তাহা হইলে ঘনকোণদ্বয়ের একের মধ্যে অপরকে ঠিক স্থাপিত করা যাইবে,

এবং তাহাতেই তাহাদের সাম্য সপ্রমাণ হইবে । (১, প: সি: ২) ।

যদি পৃষ্ঠা কোণগুলি সমভাবেস্থিত না হয়,

তাহা হইলে ঘন কোণদ্বয়ের একের কোন এক পৃষ্ঠা কোণ

অপরটির তৎসমান পৃষ্ঠা কোণের উপর স্থাপিত করিলে

দেখা যাইবে যে, ঘন কোণদ্বয়

সেই সাংলগ্ন পৃষ্ঠদ্বয়ের দুই পার্শ্বে সমভাবেস্থিত, এবং

তাহাদের সৌসাদৃশ্য হইতে তাহাদের সাম্য প্রতীয়মান হইবে ।

টিপ্পনী ১ । যে স্থলে ক হইতে ওক ’র উপর টানা লম্বদ্বয় ওখ , ওগ ’র সহিত মিলিত হয় না, সে স্থলের প্রমাণের ভার অনুশীলনার্থে বিভার্চার উপর রহিল ।

টিপ্পনী ২ । এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণে দেখা যাইতেছে, এবং যবে রাখা আবশ্যক হয়, সমান আয়তন হয় সকল স্থলে ঠিক একই স্থানে স্থাপিত, অর্থাৎ একের উপর অপরটি ঠিক অবস্থিত, করা যায় না । এবং ১ম অধ্যায়ের ১ নম্বর সিদ্ধের পরিবৃত্ত বাক্য সর্বত্র সত্য নহে ।

৮। কুজ অনকোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১৭।

যে কোন কুজ অনকোণের পৃষ্ঠ্য কোণ সমষ্টি চারি অনকোণের ন্যূন।



মনে কর ও স্থিত অন কোণ

পৃষ্ঠ্য কোণ কওখ, খওগ, গওঘ, ঘওঙ এবং উওক দ্বারা উৎপন্ন।

তাহা হইলে তাহাদের সমষ্টি < ৪ সম \angle ।

মনে কর পৃষ্ঠ্য কোণের সমতলগুলি একটি সমতল দ্বারা ছেদিত হইয়াছে,

এবং কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ওক সেই ছেদরেখা,

আব মনে কর কখগঘঙ ক্ষেত্র মধ্যে যে কোন বিন্দু স লইয়া,

সক, সখ, সগ, সঘ, সঙ টানা হইয়াছে।

(শেষোক্ত রেখাগুলি চিত্রে অঙ্কিত হয় নাই।)

তাহা হইলে ও স্থিত পৃষ্ঠ্য কোণ সকল

+ \triangle ওকখ, \triangle ওখগ ইত্যাদির ভূমি সংলগ্ন কোণের সমষ্টি

= \triangle ওকখ, \triangle ওখগ ইত্যাদির সমস্ত কোণ সমষ্টি

= বর্তগুলি \triangle আছে তাহার বিপুল সম \angle

= \triangle সকখ, \triangle সখগ ইত্যাদির সমস্ত কোণ সমষ্টি

($\therefore \triangle$ এর সংখ্যা উভয় স্থলেই সমান)

= কখগঘঙ ক্ষেত্রের সমস্ত \angle + স স্থিত সমস্ত \angle

= কখগঘঙ'র সমস্ত \angle + ৪ সম \angle ।

এখন ক, খ, গ, ঘ, ঙ স্থিত প্রত্যেক ঘন কোণ

এক একটি ত্রিপৃষ্ঠা ঘন কোণ

বাহ্যর ২টি পৃষ্ঠা \angle , Δ ও কখ, Δ ও খগ ইত্যাদির ভূমি সংলগ্ন \angle ,

এবং একটি পৃষ্ঠা \angle , কখগঘঙ'র \angle ।

এবং \therefore ঐ কোণত্রয়ের দুটির সমষ্টি $>$ তৃতীয়টি,

$\therefore \Delta$ ও কখ, Δ ও খগ প্রভৃতির ভূমিসংলগ্ন কোণ সমষ্টি

$>$ কখগঘঙ'র কোণ সমষ্টি,

এবং \therefore ঙ স্থিত পৃষ্ঠা কোণ সমষ্টি $<$ ৪ সম \angle ।

অনুমান । সমবাহ সমানকোণী সমান পৃষ্ঠ পরিবেষ্টিত ঘনদ্বাতন পাঁচ প্রকারের অধিক হইতে পারে না ।

কারণ, ঐরূপ ঘনদ্বাতনের প্রত্যেক ঘনকোণকে অবশ্যই দুটি নিরমাধীন হইতে হইবে,

(১) তাহার পৃষ্ঠা সামতলিক কোণের সংখ্যা তিনের অনূন হইবে, এবং

(২) তাহার পৃষ্ঠা সামতলিক কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের ন্যূন হইবে ।

অতএব পঞ্চভুজের অধিক বাহু বিশিষ্ট সমবাহ সমানকোণী ঋজুবৈধিক ক্ষেত্র ঐরূপ ঘনদ্বাতনের পৃষ্ঠ হইতে পারে না,

কারণ, ঐরূপ ক্ষেত্রের তিন কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের ন্যূন নহে

(১, উঃ প্রঃ ৮, অঙ্কঃ ৫) ।

আবার সমবাহ ত্রিভুজের ৫ অপেক্ষা অধিক সংখ্যক কোণ, এবং সমবাহ সমানকোণী চতুর্ভুজ ও পঞ্চভুজের ৩ অপেক্ষা অধিক সংখ্যক কোণ,

ঐরূপ ঘনদ্বাতনের ঘনকোণের পৃষ্ঠা কোণ হইতে পারে না,

কারণ, তাহাদের সমষ্টি ৪ সমকোণের ন্যূন নহে ।

অতএব উক্তরূপ বনরাতন যে যে প্রকারের হওয়া সম্ভবপর

তাঁহা কেবল এই—

অর্থাৎ বাহ্যিক দশ কোণের পৃষ্ঠাকোণ—

- | | | | |
|-----|-------------------------|--------------|------------------------|
| (১) | সমবাহু ত্রিভুজের | $৩ \angle$, | (যথা চতুর্দশ পৃষ্ঠ), |
| (২) | • | $৪ \angle$, | (যথা অষ্টপৃষ্ঠ), |
| (৩) | ... • | $৫ \angle$, | (যথা বিংশতি পৃষ্ঠ), |
| (৪) | •• সমকোণী চতুর্ভুজের | $৪ \angle$, | (যথা ষট্‌পৃষ্ঠ), |
| (৫) | ... সমান কোণী পঞ্চভুজের | $৩ \angle$, | (যথা দ্বাদশ পৃষ্ঠ) । |

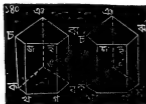
চিহ্ননী । কাগজ কাটিয়া ঐরূপ বনরাতন প্রস্তুত করিবার প্রণালী এই অধ্যায়ের

৩ সন্ধ্যায় প্রতিজ্ঞার দর্শিত হইয়াছে ।

৯। ফলক, সামান্তরিক পৃষ্ঠ, ও স্ফটিক
খন ফল।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৮।

সমান ও সদৃশভূমি স্থিত এবং সমান
উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলক সকল পরস্পর
সমান।



মনে কব কথগষঙ—চজহবঞ এবং ক'খ'গ'ষ'ঙ—চ'জ'হ'ব'ঞ',
সমান ও সদৃশ কথগষঙ এবং ক'খ'গ'ষ'ঙ' ভূমিস্থিত,

কচ এবং ক'চ' সমান উচ্চতা বিশিষ্ট, দুটি সোজা ফলক।

তাহা হইলে তাহারা পরস্পর সমান।

কারণ, যদি ফলক ক'খ'গ'ষ'ঙ—চ'জ'হ'ব'ঞ',

ফলক কথগষঙ—চজহবঞ'র উপর

এরূপে স্থাপিত করা যায় যে,

ক', ক'র উপর এবং | ক'খ', | ক'খ'র উপর পড়িবে,

তাহা হইলে খ', খ'র উপর পড়িবে, \therefore ক'খ' = কখ,

| খ'গ', | খ'গ'র উপর পড়িবে, \therefore \angle ক'খ'গ' = \angle কখগ,

এবং গ', গ'র উপর পড়িবে; \therefore খ'গ' = খগ।

ইত্যাদি।

ইত্যাদি।

অর্থাৎ ক্ষেত্র ক'খ'গ'ষ'ঙ' ক্ষেত্র কথগষঙ'র উপর পড়িবে।

স্রাবার ক'চ', ক'চ'র উপর পড়িবে, \therefore উভয়েই \perp ভূমি,
এবং চ', চ'র উপর পড়িবে, \therefore ক'চ' = কচ ।

এবং সেই কারণে, জ', হ', বা', ঞ', ইহারা জ, হ, বা, ঞ'র উপর পড়িবে ।

এবং সমস্ত ফলক ক'খ'গ'ঘ'ঙ'—চ'জ'হ'বা'ঞ',
ফলক কখগঘঙ —চজহবাঞ'র সহিত
এক স্থানে থাকিবে ।

অতএব ফলকদ্বয় পরস্পর সমান ।

টিপ্পনী । উপরে মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, ফলকদ্বয় ভিতরে শূন্য এবং বাহিরে তাহাদের ভূমি ও পৃষ্ঠ কাল্পনিক সমতল এবং অনার্যাসে ছেদ ।

অনুমান ১ । সমান উচ্চতা বিশিষ্ট এবং সমান সামান্তরিক ভূমি-
স্থিত সোজা ফলকদ্বয় সমান ।

কারণ, প্রত্যেক ভূমিকেই তাহাব একটি বাহুর উপর তৎসমান ক্ষেত্রফলের
আয়ত্রে সহজে পরিবর্তিত করা যায়, এবং একরূপ খণ্ডে বিভক্ত করা যায় যে,
সেই খণ্ডগুলি ঠিক আয়তের স্থানে বসিবে (১, উঃ প্রঃ ১৮, টিপ্পনী ১) ।
এবং প্রত্যেক ভূমিই ফলককে ভূমির ভাণ্ডারসারে ভূমির উপর লম্ব সমতল
দ্বারা খণ্ডে খণ্ডে বিভক্ত করিয়া, আয়ত ভূমিস্থিত সম উচ্চতা বিশিষ্ট ফলকে
পরিবর্তিত করা যাইতে পারে । তাহা হইলে উভয় ফলকেই আয়ত ভূমি সমান
হইবে । তদনন্তর উপযুক্ত রৈখিক এক নির্ধারিত করিয়া উভয় পরিবর্তিত
ফলকের আয়ত ভূমিকে সমান ও সমসংখ্যক রৈখিক একের বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত
করা যাইতে পারে, এবং প্রত্যেক বর্গ ক্ষেত্রের উপর তাহাব সীমা রেখা দিয়া
লম্ব সমতল টানিয়া, তত্পরি এক একটি সোজা ফলক উৎপন্ন করা যাইতে
পারে । আর তাহা হইলে প্রত্যেক আয়ত ভূমিই সোজা ফলক, সমসংখ্যক
সমান বর্গক্ষেত্র ভূমিই সোজা ফলকখণ্ডে বিভক্ত হইবে । এই শ্রেণীকৃত ফলক
খণ্ডগুলি স্পষ্টই পরস্পর সমান । এবং তাহা হইলে মূল ফলকদ্বয়ও অবশ্যই
সমান ।

অনুমান ২ । ইহা হইতে দেখা যাইতেছে, সমান ত্রিভুজভূমিহ সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সোজা ফলকদ্বয় সমান ।

কারণ, তাহার। স্পষ্টই প্রত্যেকে সমান সামান্তরিক ভূমিহ সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ফলকের অর্ধেক, এবং শেবোক্ত প্রকারের ফলকদ্বয় উপরের ১ অনুমানানুসারে সমান ।

অনুমান ৩ । সামান্তরিক, সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সমান ষড়্-
রৈখিক ক্ষেত্র ভূমিহ সোজা ফলকদ্বয় পরস্পর সমান ।

কারণ, ১ম অধ্যায়ের ১০ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, প্রত্যেক ভূমিই ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইতে পারে। এবং সেই সকল ত্রিভুজেব বাহু দ্বিগু ভূমির উপর লম্ব সমতল টানিলে প্রত্যেক ফলক কতকগুলি ত্রিভুজ ভূমিহিত সোজা ফলকে বিভক্ত হইবে। আর উপরের ২ অনুমান অনুসারে এই শেবোক্ত সোজা ফলকগুলি প্রত্যেকেই স্ব স্ব ত্রিভুজ ভূমিব সমান অত্র ত্রিভুজভূমিহ সোজা ফলকের সমান হইবে। সুতরাং প্রত্যেক মূলভূমি ১ম অধ্যায়ে ১০ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞানুসারে তত্ত্ব ল্য ত্রিভুজে পরিবর্তিত করিলে, প্রত্যেক মূলফলক শেবোক্ত ত্রিভুজ ভূমিহিত সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলকে পরিবর্তিত হইতে পারিবে। এবং সেই শেবোক্ত ত্রিভুজভূমিহ যখন সমান, তখন উপরের ২ অনুমানানুসারে তদুপবিস্থিত সমান উচ্চতা বিশিষ্ট পরিবর্তিত ফলকদ্বয় অবশ্যই সমান ।

অনুমান ৪ । যদি একটি ফলকের ভূমি এবং পৃষ্ঠগুলি অপর একটি ফলকের ভূমি ও পৃষ্ঠগুলির সহিত যথাক্রমে সর্বাংশে সমান হয়, তবে ফলকদ্বয় সমান হইবে ।

কারণ, উভয় ফলকেরই প্রত্যেক ঘন কোণ ত্রিপৃষ্ঠ্য কোণ । এবং এক ফলকের প্রত্যেক ঘনকোণ বে বে পৃষ্ঠ্যকোণের যোগে উৎপন্ন, অপর ফলকের তদনুরূপ ঘনকোণ তত্ত্ব ল্য পৃষ্ঠ্যকোণত্রয়ের যোগে উৎপন্ন । সুতরাং এক ফলকের ঘন কোণগুলি যথাক্রমে অপর ফলকের ঘন কোণগুলির সমান (৫, উঃ প্রঃ ১৬) ।

এবং এক ফলকের দ্বার অর্থাৎ পৃষ্ঠ্যোন্নক রেখাগুলি যথাক্রমে অপর ফলকের দ্বারগুলির সহিত সমান । অতএব ফলকদ্বয় একের উপর অপরটি স্থাপিত হইতে পারে, এবং তাহার। অবশ্যই সমান হইবে ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

একই ভূমিহিত এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিক পৃষ্ঠদ্বয় পরস্পর সমান।



১ চিত্র।

মনে কর কথগঘ—উচজ্জহ এবং কথগঘ—উ'চ'জ্জ'হ' দুটি সামান্তরিক পৃষ্ঠ একই ভূমি কথগঘ হিত এবং সমান উচ্চতা বিশিষ্ট।

তাহা হইলে তাহারা পরস্পর সমান।

প্রথমতঃ মনে কর তাহাদের দুটি ধার উচ, উ'চ'

একটীক জুঝখাতে, যথা ১ম চিত্রে।

তাহা হইলে জ্জহ, জ্জ'হ' ও একই। তে, এবং ॥ উচ, উ'চ'।

এবং \therefore উচ=কথ=উ'চ', \therefore উজ' = চচ'।

আর সেই কারণে জ্জজ' = হহ'।

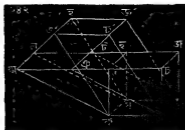
এবং কঘ = খগ, কঙ = খচ, কঙ' = খচ'।

অতএব ফলক কঙঙ'—খহহ' এবং ফলক খচচ'—গজজ' ইহাদের ভূমি ও পৃষ্ঠ সর্বাংশে সমান,

সুতরাং তাহারা সমান (১২, উঃ প্রঃ ১০, অঙ্কঃ ৪)।

এই সমান ফলকদুটি যথাক্রমে চিত্রের সমস্ত দ্বারতন হইতে বাদ দিলে, বাকি সামান্তরিক পৃষ্ঠ কথগঘ—উচজ্জহ

—বাকি সামান্তরিক পৃষ্ঠ কথগঘ—উ'চ'জ্জ'হ'।



২ চিত্র ।

দ্বিতীয়তঃ মনে কব ওঁচ এবং ওঁ'চ'

একট কঙ্কবেখায় নচে, যথা ২য় চিত্রে ।

ই'ওঁ এবং ওঁ'চ'কে বদ্ধিত কবিন্না

চও, জহ'ব সহিত বা, ল, ঞ, টতে মিলাইয়া দেয় ।

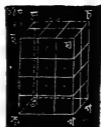
তাহা হইলে পূর্ববর্তী প্রমাণানুসারে,

কথগঘ-ওঁচজহ এবং কথগঘ-ওঁ'চ'জ'হ'

অত্যেকেট = কথগঘ-বা ঞটল,

অন্তএব তাহাবা পবম্পব সমান ।

অনুমান ১। যদি কোন সমকোণী সামান্তরিক পৃষ্ঠের তিনটি সংলগ্ন ধারে অর্থাৎ কথ, খগ, ও খঘতে, অর্থাৎ তাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধে, অ, ই, উ, বৈধিক এক থাকে, তাহা হইলে, সেই সমকোণী সামান্তরিক পৃষ্ঠে $অ \times ই \times উ$ ঘন এক অর্থাৎ ঘনক্ষেত্র থাকিবে। আর এই কথা সংক্ষেপে এইরূপে বলা যায় —



যদি কোন সমকোণী সামান্তরিক পৃষ্ঠের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ, যথাক্রমে
= অ, ই, উ, হয়

তবে তাহার ঘনকল = অইউ।

কারণ, যদি ঐ ধার তিনটি, অ, ই, উ, ভাগে ভাগ করা যায়, এবং ভাগের চিহ্ন দিয়া সমস্তল টানা যায় ॥ সামান্তরিকপৃষ্ঠের তিনটি সংলগ্ন পৃষ্ঠ, তাহা হইলে ঐ সামান্তরিকপৃষ্ঠ ছোট ছোট ঘনক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে, এবং ঐ প্রত্যেক ঘন ক্ষেত্রের বাহুর বৈধিক একের সমান হইবে, আর ঐ ঘনক্ষেত্রের সংখ্যা

= এক স্তরের ঘনক্ষেত্রের সংখ্যা

\times স্তরের সংখ্যা

= ঘচজইতে বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা

\times খঘতে বৈধিক একের সংখ্যা

= অ \times ই \times উ।

টিপ্পনী ১। ১ম অধ্যায়ের ২০, ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার টিপ্পনীতে বাহা বলা হইয়াছে তাহা মনে রাখিলে বুঝা যাইবে, অ, ই, উ, অথবা বা গও রাশি, পরিমের বা অপরিমের রাশি, হইতে পারে।

টিপ্পনী ২। এই প্রতিজ্ঞা ১ অধ্যায়ের ১৮ট: প্রতিজ্ঞার অনুরূপ।

অনুমান ২ । —সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফল
 $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল \times উচ্চতা ।

কারণ যে কোন সামান্তরিক পৃষ্ঠ, একই ভূমিস্থ সমান উচ্চ এবং ভূমির উপর লম্ব পৃষ্ঠবিশিষ্ট, অপর একটি সামান্তরিক পৃষ্ঠের সমান । এবং এই অপর সামান্তরিক পৃষ্ঠ একটি সোজা ফলক, সুতরাং তাহা সমান উচ্চ সমান আরতভূমিস্থিত সামান্তরিক পৃষ্ঠের সমান (২, উঃ প্রঃ ১৮, অঙ্কঃ ১) । আর এই শেখোক্ত সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফল, পূর্ববর্তি অনুমানানুসারে তাহার ভূমি এবং উচ্চতার গুণফলেই সমান ।

অনুমান ৩ । সামান্তরিক পৃষ্ঠের কর্ণ সমতল, অর্থাৎ কোণাকোণী সমতল, তাহাকে ছুটি ত্রিভুজভূমিস্থ সমান ঘনবলের ফলকে বিভক্ত করে, এবং সেই প্রত্যেক ফলকের ঘনফল

$=$ সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফলের অর্ধেক

$= \frac{1}{2} \times$ সামান্তরিক পৃষ্ঠের ভূমির ক্ষেত্রফল \times উচ্চতা

$=$ ফলকেব ত্রিভুজভূমির ক্ষেত্রফল \times উচ্চতা ।

অনুমান ৪ । যে হেতুক প্রত্যেক ফলকেব ভূমিকে ত্রিভুজ সমূহে বিভক্ত কবিয়া তাহাকে ত্রিভুজভূমিস্থিত ফলকসমূহে বিভক্ত কবা যায়, অতএব, যে কোন ফলকের ঘনফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল \times উচ্চতা ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২০।

সমান উচ্চতাবিশিষ্ট, এবং সমান ক্ষেত্র-ফলের ভূমির উপরিস্থ সৃষ্টিকৃত পল্লভূমি সমান।



२ छिन्न ।



२ छिन्न ।

মনে কর ও-কথগঘ, ও'-ক'থ'গ'.

গরান উচ্চতাবিশিষ্ট এবং ক'থ'গ'স, ক'থ'গ' সমান ভূমিই ছটি সূচী।

তাহা হইলে তাহার পবিত্র সমান হইবে।

উভয় উচ্চতাকে সমান ন ভাগে ভাগ করিয়া ভাগচিহ্ন দিয়া প্রত্যেক দ্বীপের ভূমির ॥ সমস্তল টান ।

তাহা হইলে প্রত্যেক স্থচীতে সেই সকল সমস্তলের ছেদক্ষেত্রগুলি

সদৃশ ও ভূমির সমান্তরাল হইবে। (৫, উ: প্র: ১৩, ১৪, ৩, উ: প্র: ৮)।

এবং ভূমিদেয় যখন সমান, তখন

এক সূচীর ছেদক্ষেত্রগুলি যথাক্রমে অপর সূচীর ছেদক্ষেত্রগুলির সমান হইবে।

এখন মনে কর, এই ছেদক্ষেত্রগুলির উপর ১ম চিত্রে তাহাদের নীচের পৃষ্ঠে, ২য় চিত্রে তাহাদের উপর পৃষ্ঠে, কলক অঙ্কিত করা হইল, যাহাদের

উচ্চতা = $\frac{1}{n} \times$ মূল সূচীর উচ্চতা। তাহা হইলে এক সূচীস্থিত ফলকগুলি

যথাক্রমে অপর সূচীস্থিত কলকগুলির সমান হইবে.

কারণ, তাহাদের ভূমি এবং উচ্চতা সমান (৪, উ: প্র: ১২, অস্থ: ৪)।

মনে কর ড, ড', হ্রস্বের ঘনফল,

স, স', হ্রস্বদ্বিহিত ফলক সমষ্টির ঘনফল ।

তাহা হইলে $স'-স=ড'-ক'থ'গ'$ হ্রিত নিম্নতম ফলকের ঘনফল ।

কিন্তু ন কে অসীমরূপে বর্ধিত করিলে সেই নিম্নতম ফলকের উচ্চতা ও ঘনফল অসীমরূপে হ্রাস পাইবে, এবং পরিশেষে লোপ পাইবে ।

অতএব পরিশেষে $স'-স$ ।

এবং তখন ড এবং $স'$ র অন্তরও ড' এবং $স'$ র অন্তর উভয়ই লোপ পাইবে ।

কারণ, ফলকগুলির উচ্চতা যত কম হইবে,

প্রত্যেক ফলক এবং সেই স্তরের হ্রস্বাংশের প্রত্যেক ততই কম হইবে ।

এবং $ড=স=স'=ড'$ হইবে ।

অনুমান ১ । ত্রিভুজভূমিহিত হ্রস্ব, ঘ-ক'থ'গ'র ঘনফল একট ভূমিহিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ফলক ক'থ'গ'-ঘঙচ'র ঘনফলের তিন অংশেব একাংশ ।

সমতল গ'ঘ'থ' ও ঙগ'ঘ'টান । তাহা হইলে,

হ্রস্বের গ'-ক'ঘ'থ', গ'-ঙ'থ'ঘ', বাহাদেব ভূমিঘর

ক'ঘ'থ', ঙ'থ'ঘ' সমান, এবং উচ্চতা, গ' হইতে

ক'ঘ'ঙ'ঘ' সমতলে লব, পরস্পর সমান ।



এবং হ্রস্বের গ'-ক'ঘ'থ', গ'-ঘঙচ', বাহাদেব

ভূমিঘর ক'ঘ'গ', ঘঙচ' সমান,

এবং উচ্চতা সমতল ক'ঘ'গ' ও সমতল ঘঙচ'র অন্তর, পরস্পর সমান ।

অতএব ফলক ক'ঘ'গ'-ঘঙচ' তিনটি সমান হ্রস্ব

গ'-ক'ঘ'থ', গ'-ঙ'থ'ঘ' এবং গ'-ঘঙচ'তে বিভক্ত হইরাছে ।

সুতরাং হ্রস্ব গ'-ক'ঘ'থ' অর্থাৎ ঘ-ক'ঘ'গ'

$=\frac{1}{3}$ ফলক ক'ঘ'গ'-ঘঙচ' ।

অনুমান ২ । হ্রচীমাজেরই ঘনফল সমান ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ফলকের ঘনফলেব তিন অংশের একাংশ ।

কারণ, হ্রচীমাজেরই ভূমিকে ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া সেই ত্রিভুজ সমূহের বাহ ও হ্রচীৰ শীৰ্ষবিন্দু দিয়া সমতল টানিয়া, সেই হ্রচীকে ত্রিভুজ-ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট হ্রচী সমূহে বিভক্ত করা বাইতে পারে । এবং ক্রমবত্তর ভঙ্গক্রে পূৰ্ববৰ্ত্তিঅনুমান খাটান বাইতে পারে ।

অনুমান ৩ । হ্রচীৰ ঘনফল

$= \frac{1}{3}$ ভূমিৰ ক্ষেত্রফল \times উচ্চতা ।

১০। বৃত্তমুচী, স্তম্ভ, ও গোলকের ঘনফল ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২১।

সোজা বৃত্তমুচীর ঘনফল সমান ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সোজা স্তম্ভের ঘনফলের তিন অংশের একাংশ ।



কাবণ, বৃত্তভূমি, ওকক, এর মত অসীমবৃহৎসংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বৃত্তচ্ছেদকে বিত্তকৃত হইতে পারে ।

আর তাহাদের প্রত্যেককে এক একটি ত্রিভুজ মনে করা যাইতে পারে । এবং তাহাদের উপর বৃত্তস্থচীর উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলক ও সোজা হুচী অঙ্কিত হইরাছে, ও সেট হুচীসমূহের শীর্ষ বৃত্তস্থচীর শীর্ষ, মনে করা যাইতে পারে ।

তাহা হইলে, প্রত্যেক হুচীব ঘন ফল = $\frac{1}{3}$ তৎসংস্থষ্ট ফলকের ঘনফল ।

এবং পরিশেষে যখন ঐ ঘনফলের সমষ্টিস্থর

বৃত্তস্থচীর ও স্তম্ভের ঘনফলদ্বয়ের তুল্য,

তখন বৃত্তস্থচীর ঘনফল = $\frac{1}{3}$ স্তম্ভের ঘনফল ।

অনুমান ১। যদি b = বৃত্তভূমিব ব্যাসার্ধ,

h = বৃত্তস্থচীর উচ্চতা,

তাহা হইলে স্তম্ভের ঘনফল = $\pi r^2 h$,

বৃত্তস্থচীর ঘনফল = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ।

অনুমান ২ ।

তন্তের কুজ গুঠের ক্ষেত্রফল = ২ পরহ ।

(কুজ গুঠকে কক, ক_২ ক' এর মত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র
আরতে বিভক্ত করিলে এই ক্ষেত্র ফল পাওয়া যায়) ।

বৃত্তস্থচীর কুজ গুঠের ক্ষেত্রফল = $\frac{২পরহ'}{২}$,

যথায় হ' = বৃত্তস্থচীর গড়ান উচ্চতা, বা দূর্ণ্যমান সমকোণী ত্রিভুজের
কর্ণ, ওক ।

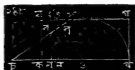
(কুজ গুঠকে কক, ও' এর মত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র

ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে এই ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়) ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-২২।

গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বহিঃস্থিত স্তম্ভের কৃত্তপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমান।

এবং গোলকের ঘনফল বহিঃস্থিত স্তম্ভের ঘনফলের তিন অংশের দুই অংশ।



মনে কর কব' একটি অর্ধবৃত্ত যাচাব কেন্দ্র ও, ব্যাসার্ধ = r ,
এবং কখ'গঘ', আরও বা বৃত্তের বহিঃস্থিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

তাহাদেরই ঘূর্ণনদ্বারা গোলক ও স্তম্ভ উৎপন্ন হইবে।

মনে কর বব' O 'র দুটি অতি সরিহিত বিন্দু,
হুতরাং পবব', ব'তে O এর স্পর্শিনী।

ওব যোগ কব, ওবন, ও'ব'ন' \perp কখ' টান,
এবং মনে কর পবব', খক'র সহিত চ'তে মিলিত।

$$\begin{aligned} \text{তাহা হইলে } \frac{\text{বব}'}{\text{ওও}'} &= \frac{\text{বপ}}{\text{ওপ}} \quad (\text{ও, উ: প্র: } \angle) \\ &= \frac{\text{ওব}}{\text{বন}} \quad (\text{সদৃশ } \triangle \text{ ওবপ, } \triangle \text{ নওব হইতে}) \\ &= \frac{\text{ওন}}{\text{বন}} \quad (\because \text{ওন} = \text{ওব}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{বন} \cdot \text{বব}' = \text{ওন} \cdot \text{ওও}'$$

এখন জ্যা বব' এর ঘূর্ণনজনিত পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= বৃত্তস্থচী বাহার শীর্ষ চ তাহার কূজ পৃষ্ঠের এককালির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times ২৫ \text{ বন} \cdot \text{বচ} - \frac{1}{2} \times ২৫ \text{ বন}' \cdot \text{ব'চ}$$

$$= ২৫ \times \frac{1}{2} (\text{বন} \cdot \text{বচ} - \text{বন} \cdot \frac{\text{ব'চ}}{\text{বচ}} \cdot \text{ব'চ}) (\because \text{বন}' = \frac{\text{ব'চ}}{\text{বচ}})$$

$$= ২৫ \times \frac{\text{বন}}{\text{বচ}} \times \frac{1}{2} (\text{বচ}^২ - \text{ব'চ}^২)$$

$$= ২৫ \times \frac{\text{বন}}{\text{বচ}} \times \frac{1}{2} (\text{বচ} + \text{ব'চ}) (\text{বচ} - \text{ব'চ})$$

$$= ২৫ \times \frac{\text{বন}}{\text{বচ}} \times \frac{1}{2} (\text{বচ} + \text{ব'চ}) \text{বব'}$$

$$= ২৫ \times \text{বন} \text{বব'}, \text{ পরিশেষে,}$$

যখন জ্যা বব' ও চাপ বব' মিলিত হইবে,

এবং বচ = ব'চ, সুতরাং $\frac{1}{2} (\text{বচ} + \text{ব'চ}) = \text{বচ}$ হইবে।

অতএব বব' এর ঘূর্ণন জনিত গোলক পৃষ্ঠের মণ্ডল

$$= ২৫ \cdot \text{বন} \cdot \text{বব'}$$

$$= ২৫ \cdot \text{ওন} \cdot \text{ওঙ' } (\because \text{বন} \cdot \text{বব'} = \text{ওন} \cdot \text{ওঙ'})$$

$$= \text{ওঙ' এর ঘূর্ণন জনিত স্তম্ভের কূজ পৃষ্ঠের মণ্ডল।}$$

$$\therefore \text{সমস্ত গোলকপৃষ্ঠ} = \text{স্তম্ভের সমস্ত কূজ পৃষ্ঠ} = ২৫ \times ২৫$$

$$= ৬২৫ \text{।}$$

গোলকের ঘনফল নির্ণয়ার্থে,

মনে কব, গোলক পৃষ্ঠের তিনটি সমিহিত বিন্দু লইয়া একটি ত্রিভুজ হইল,

সমস্ত গোলক পৃষ্ঠ ঐরূপ অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ত্রিভুজে বিভক্ত হইল,

এবং ঐরূপ প্রত্যেক ত্রিভুজকে ভূমি, ও কেন্দ্রকে শীর্ষ, করিয়া এক একটি

স্থচী অঙ্কিত হইল।

তাহা হইলে গোলকের ঘনফল = ঐ হুটী সমূহের ঘন ফল ।

এবং প্রত্যেক হুটীর ঘনফল = $\frac{4}{3} \times r \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল ।

\therefore হুটীর সমষ্টিব ঘনফল = $\frac{4}{3} \times r \times$ ভূমি সমষ্টির ক্ষেত্রফল

= $\frac{4}{3} \times r \times$ গোলক পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= $\frac{4}{3} \times r \times 4 \text{ ঘর}^2 = \frac{16}{3} \text{ ঘর}^3$ ।

\therefore গোলকের ঘন ফল = $\frac{16}{3} \text{ ঘর}^3$ ।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ।

১। সমতলের ও ঋজুরেখার উপর
লম্ব অঙ্কিত করণ ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-১।

সমতলের বাহিরে স্থিত নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে
তদুপরি লম্ব টান ।



নির্দিষ্ট সমতল ব'তে । খগ টান,

এবং নির্দিষ্ট বিন্দু ক হইতে, কঘ \perp খগ টান ।

যদি কঘ \perp ব, তবে কঘই ইষ্ট লম্ব ।

যদি না হয়, তবে সমতল ব'তে ঘঙ \perp খগ টান,

এবং সমতল কঘঙ তে কচ \perp ঘঙ টান ।

তাহা হইলে কচ \perp সমতল ব ।

চজ ॥ খগ টান ।

তাহা হইলে, \therefore কঘ \perp কঘ এবং ওঘ,

\therefore কঘ \perp সমতল কঘঙ (৮, উঃ প্রঃ ৪) । এবং জচ ॥ কঘ ।

\therefore জচ \perp সমতল কঘঙ (৮, উঃ প্রঃ ৬) ।

\therefore জচ \perp কচ, অর্থাৎ কচ \perp জচ । এবং কচ \perp ওঘ ।

\therefore কচ \perp সমতল ব (৮, উঃ প্রঃ ৪) ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সমতলস্থিত যে কোন বিন্দু
হ হইতে তদুপরি লম্ব টানিতে পারা যায় ।

কারণ, নির্দিষ্ট সমতলের বাহিরে যে কোন বিন্দু ক হইতে কচ \perp সমতল
টানিয়া, হ হইতে হঘ ॥ কচ টানিলে, স্পষ্ট দেখা যায়, হঘ \perp সমতল ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—২ ।

ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থিত দুটি ঋজুরেখার উপর একটি লম্ব টান।



নির্দিষ্ট ঋজুরেখারের কোন একটি কথ'তে যে কোন বিন্দু থ' লইয়া,
খণ্ড ॥ গঘ (অপ'ব নির্দিষ্ট |) টান।

গঘ তে যে কোন বিন্দু চ লইয়া, চজ \perp সমতল কথ'ঙ টান।

আর জহ ॥ গঘ টান,

এবং কথ ও জহ'র ছেদবিন্দু হ হইতে হ'ব ॥ জচ টান।

হ'ব ইট ল'ব।

কারণ, \therefore হ'ব ॥ জচ, এবং জচ \perp সমতল কথ'ঙ,

\therefore হ'ব \perp কথ'।

আবার \therefore জহ ॥ গঘ, এবং \angle জহ'ব = সম \angle ,

$\therefore \angle$ হ'বচ = সম \angle , অর্থাৎ হ'ব \perp গঘ।

\therefore হ'ব \perp কথ ও গঘ।

২। সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্রপৃষ্ঠ
অনান্যতন অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা-৩।

সমবাহু সমানকোণী পৃষ্ঠ পঞ্চ অনান্যতন
অঙ্কিত কর।



১। চতুর্ভূজ।



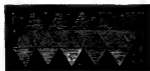
২। ষট্‌পৃষ্ঠ।



৩। অষ্টপৃষ্ঠ।



৪। দ্বাদশপৃষ্ঠ।



৫। বিংশতিপৃষ্ঠ।

কাগজের উপর অঙ্কিত কর,
সমান সমবাহু ত্রিভুজ ৪টি (১ম চিত্রে যথা),
• • • ৮টি (৩য় চিত্রে যথা),
• • • ২০টি (৫ম চিত্রে যথা),
• • • সমকোণী চতুর্ভূজ ৬টি (২য় চিত্রে যথা),
• • • সমানকোণী পঞ্চভূজ ১২টি (৪র্থ চিত্রে যথা)।

প্রত্যেক চিত্রে, অসংলগ্ন ধার দিয়া কাগজ কাট, এবং সংলগ্ন ধার দিয়া
কাগজ ভাঁজ কর, তাহা হইলেই ১ম চিত্রে চতুর্ভূজ, ২য় চিত্রে ষট্‌ পৃষ্ঠ, ৩য় চিত্রে
অষ্ট পৃষ্ঠ, ৪র্থ চিত্রে দ্বাদশ পৃষ্ঠ, এবং ৫ম এতে বিংশতিপৃষ্ঠ পাওয়া যাইবে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণমালা ।

১। কোন ঞ্জুরেখা কোন সমতলোপরি তাহার প্রক্ষেপণীর সহিত যে স্থান কোণ উৎপন্ন করে, তাহা সেই ঞ্জুরেখা ও তৎসংলগ্ন সেই সমতল হিত্ত অস্ত্র যে কোন ঞ্জুরেখার অন্তর্গত স্থান কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

২। যদি দুটি সমতলের ছেদরেখার যে কোন বিন্দু হইতে সমতল দ্বয়ের একটির উপর অনেকগুলি ঞ্জুরেখা টানা যায়, তাহা হইলে তন্মধ্যে যেটি ছেদরেখার উপর লম্ব, অপর সমতলের উপর তাহার অবনতি অস্ত্রান্ত্র রেখার অবনতি অপেক্ষা বৃহত্তর ।

৩। দুটি সম্পাতী সমতলের অন্তর্গত কোণ তাহাদের সম্পাতী লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান ।

৪। যদি কোন ঞ্জুরেখা দুটি সম্পাতী সমতলের প্রত্যেকেরই সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহা সমতলদ্বয়ের ছেদ রেখার সহিত সমান্তর হইবে ।

৫। যদি কোন ঞ্জুরেখা দুটি সমান্তর সমতলকে ছেদিত করে, তাহা হইলে সমতলদ্বয়ের সহিত তাহার অবনতি সমান হইবে ।

৬। যদি দুটি সমান্তর ঞ্জুরেখা একটি সমতলকে ছেদিত করে, তাহা হইলে সেই সমতলের উপর তাহাদের অবনতি সমান ।

৭। যদি তিনটি সমতল পরস্পরকে ছেদিত করে, তাহা হইলে তাহাদের ছেদরেখার একবিন্দুগামী অথবা সমান্তর ।

৮। যদি দুটি সমান্তর ঞ্জুরেখার প্রত্যেকের উপর দিয়া এক একটি সমতল টানা যায়, তাহাদের ছেদরেখা ঐ সমান্তর রেখাদ্বয়ের সহিত সমান্তর হইবে ।

৯। সমতল ভূমির উপর রাখিলে, একটি ত্রিভুজ টেবিলের তিনপদই ভূমি স্পর্শ করিবে, কিন্তু চতুষ্পদ বা ততোধিক পদ টেবিলের সকল পদগুলি তাহা না করিতে পারে । ইহার কারণ কি ?

১০। ত্রিভুজ ঘনকোণের যে কোন পৃষ্ঠা কোণ অপর পৃষ্ঠা কোণদ্বয়ের পরিপূরকের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ও তাহাদের অন্তর অপেক্ষা বৃহত্তর।

১১। গোলকে যে কোন সমতলদ্বারা ছেদিত করিলে ছেদরেখা বৃত্ত হইবে।

১২। সোজা বৃত্তস্থচীর শীর্ষবিন্দুগামী যে কোন সমতলদ্বারা তাহাকে ছেদিত করিলে ছেদরেখা দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা হইবে।

১৩। সোজা বৃত্ত স্থচীকে স্থচীশলাকার উপর লম্ব সমতল দ্বারা ছেদিত করিলে ছেদ রেখা বৃত্ত হইবে।

১৪। একটি পুঙ্খবিন্দুর উপর ও তলা উভয়ই আরত। সেই আরত দ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে d , d' , p , p' । পুঙ্খবিন্দুর গভীরতা g । এবং তাহার চাপ চাষিদিকে সমান। তাহা হইলে পুঙ্খবিন্দুর খাতের ঘন ফল।

$$= \frac{2}{3}g \times \{dp + d'p' + (d+d')(p+p')\}।$$

(লীলাবতী, ২২১)।

পরিশিষ্ট ।

১। সিন্ধল গণিতের ভাগদ্বয়ে ব্যবহৃত পান্নি-
ভাষক শব্দের বর্ণমালাপুস্তক ।

বাঙ্গালা শব্দ	ইংরাজি প্রতিশব্দ	বাঙ্গালা শব্দ	ইংরাজি প্রতিশব্দ
অখণ্ড সংখ্যা	Whole number, Integer	সরু রেখা	Straight line
অগ্রপদ	Antecedent (of ratio)	ঋণ চিহ্ন	Negative sign
অঙ্ক	Figure	ঋণ রাশি	Negative quantity
অঙ্কন	Construction	একক	Unit
অজ্ঞাত	Unknown	একপরিবৃত্ত	Concyclic
অনন্ত	Infinity	একবিন্দুগামী	Concurrent
অনবচ্ছিন্ন	Abstract	একরেখা	Collinear
অনুপাত	Ratio	একবর্ণ সরল সমীকরণ	Simple equation with one unknown
অনুমান	Corollary	একান্তর	Alternate
অন্তর	Difference	একান্তর ক্রমে	Alternately. <i>Alternando</i>
অন্তর্লিখিত	Inscribed	ঐকিক নিয়ম	Unitary method
সামান্যত্ব	Reciprocal	করণ	Surd
অপরিমেয়	Incommensurable	কর্ণ	Diagonal, Hypotenuse
অযুগ্ম	Odd	কল্পনা	Hypothesis
অরূপ	Irrational	কাল্পনিক	Imaginary
স্বচ্ছিন্ন	Concrete	কুজ	Convex
অবশ্যসম্বন্ধী	Necessary	কুসীদ	Interest
অব্যক্ত	Unknown	কেন্দ্র	Centre
অষ্টপুষ্ঠ	Octahedron	কোণ	Angle
অসঙ্গত	Non-congruent	অন্তরের	interior
আয়ত	Rectangle	একান্তর	alternate
আনন্ন	Approximate	কুজ	convex
ইচ্ছা	Required	ঘন	solid
উচ্চতা	Altitude	চতুষ্পৃষ্ঠ	tetrahedral
উৎপন্নরাশি	Product	ত্রিপৃষ্ঠ	trihedral
উৎপাদক	Factor	দ্বিপৃষ্ঠ	dihedral
উপপন্ন	Proved	পরিপূরক	supplementary
উপপাদ্য		বিরূপ	re-entrant
প্রতিজ্ঞা	Theorem		

কোণ, সরিহিত	Angle, adjacent	জ্যামিতি	Geometry
সহ	right	জ্ঞাত	Known
দৃষ্ণ	acute	ডিসকাউন্ট	Discount
স্থূল	obtuse	ত্রিভূজ	Trihedral
ক্ষেত্র	Figure	ত্রিভুজ	Triangle
রিক্টাইলিনিয়াল	rectilineal	বিষমবাহ	scalene
ফল	Area	সমবাহ	isosceles
সদৃশ	Similar figure	সমবাহ	equilateral
সমবাহ সমান		ত্রেয়াশিক	Rule of Three
কোণী	Regular figure	দশমিক	Decimal
সিক্যান্ট	Secant	পৌনঃপুনিক	recurring
গণিতের		দ্বাদশপৃষ্ঠ	Dodecahedron
সাধাভাহুমান	Mathematical Induction	বিবাত অনুপাত	Duplicate ratio
গরিষ্ঠ ফল	Maximum	বিপদ	Binomial
সাধারণ		শক্তি প্রসারণ	Expansion of power of a binomial (Binomial Theorem)
উপনায়ক	Greatest Common Measure	বিশক্তি সমীকরণ	Quadratic equation
গুণক	Multipher	ধনচিহ্ন	Positive sign
গুণন	Multiplication	রাশি	quantity
উপনায়ক	Measure	বাহতা (গুণন)	Multiplication table
গুণিতক	Multiple	নিত্য	Constant
গুণ্য	Multiplicand	নিরন্ত স্থান	Locus
গোলক	Sphere	নির্ভারিত	Conventional
ঘন	Solid	নিখ্যাত	Known
কোণ	angle	নির্ণয়	Unknown
ক্ষেত্র	Cube	পক্ষ	Side
ফল	Volume	বদল	Transposition
মূল	Cube root	পদ	Term
ঘাতাবেশ	Involution	পরশ্ব	Consequent (of a ratio)
চক্রবৃদ্ধি	Compound interest	ঘনাক্তন	Solid figure
চতুর্ভুজ	Quadrilateral	পরিধি	Circumference
চতুর্ভুজ	Tetrahedron	পরিমিতি	Perimeter
চাপ	Arc	পরিমেষ	Commensurable
সিক্যান্ট	Secant	পরিবৃত্ত	Converse
জ্যা	Chord	পাদিগণিত	Arithmetic

পূর্বপদ	Antecedent (of a ratio)	মিশ্ররাশি	Mixed quantity
পৃষ্ঠ	Face, surface	যোগ	Compound addition
পৌনঃপুনিক	Recurring	বিয়োগ	subtraction
প্রকৃতি	Coefficient	গুণন	multiplication
আক্ষরিক	literal	ভাগ	division
সাংখ্য	numerical	মূল	Root
প্রক্ষেপণী	Projection	মূল্যাকর্ষণ	Extraction of root
প্রস্থাব	Permutation	মৌলিক সংখ্যা	Prime number
কলক	Prism	যুগ্ম	Even
সোজা	right	যোগ	Addition
বন্ধনী	Bracket	ক্রমে	By addition, <i>Componendo</i>
বহুভুজ	Polygon	যোগকল	Sum
বাকি	Remainder	যোগ্য	Summand
বাহ	Subtract	রাশি	Quantity, number
বিন্দু	Point	রাশিমালা	Expression
ভগ্নাংশ	Fraction	রূপরাশি	Rational quantity
অগ্রকৃত	improper	রেখা	Line
জটিল	complex	কজু	straight
প্রকৃত	proper	কুটিল	crooked, curved
মিশ্র	mixed	লগসংখ্যা	Logarithm
ভাগ	Division	লঘিষ্ঠ কল	Minimum
ফল	Quotient	লঘিষ্ঠসাধারণ	Least Common Multiple
শেষ	Remainder	গুণিতক	Reduction
ভাজক	Divisor	লম্বকরণ	Perpendicular
ভাজ্য	Dividend	লম্ব	Harmonic mean
ভাবনিক রাশি	Imaginary quantity	লম্ব মধ্যম	Harmonical Progression
ভিত্তি	Base of logarithm	সেতী	Numerator
ভূমি	Base of triangle or other figure	বর্গ	Square
মধ্যম	Mean	মূল	root
সমানুত্তর	arithmetic	বহিঃস্থিত	Circumscribed
সমগুণ	geometric	বিংশতিশৃষ্ঠ	Icosahedron
লম্ব	harmonic	বিশিষ্টাংশ	Variation
মধ্যমসামান্য	Mean proportional	বিশিষ্টক্রমে	By inversion, <i>Invertendo</i>
মূল	Root (of an equation)	বিয়োগ	Subtraction
মিশ্রণ	Alligation		

বিয়োগ ক্রমে	By division, <i>Dividendo</i>	সমপদ	Similar term
ফল	Difference, remainder	সমপ্রাণী	Homologous
বিয়োজন	Minuend	সমবর্তী	Simultaneous
বিয়োজ্য	Subtrahend	সমশীল	Homologous
বিশ্বসঙ্গ	Dissimilar term	সমষ্টি	Sum
বৃত্ত	Circle	সমসাময়িক	Simultaneous
খণ্ড	segment of	সমানুপাত	Proportion
বৃত্তক্ষেত্রক	Sector	সমানুপাতী	Proportional
বৃত্ত হুটী	Cone	সমান্তর	Parallel
সোজা	right	স্বাভাব	Arithmetic mean
বৈষম্য	Inequality	শ্রেণী	Arithmetical
ব্যবকলন	Subtraction		Progression
ব্যাস	Diameter	সমীকরণ	Equation
ব্যাসার্ধ	Radius	একবর্ণ	with one
শক্তি	Power		unknown
শক্তি প্রসারণ	Expansion of power	বিশক্তি বা বর্গ	Quadratic equation
‘শক্তিহ্রস্বক শ্রেণী	Exponential series	সকল	Simple equation
শূন্য	Zero	সম্পাত	Intersection
শৃঙ্খল নিয়ম	Chain Rule	সম্পাতী	Intersecting
শ্রেণী	Series	সম্পাদ্যপ্রতিজ্ঞা	Problem
সর	Harmonical	সাঙ্কেতিক	Practice
সমস্ত	Geometrical	সাঙ্কেতিক বাঁকা	Formula
সমান্তর	Arithmetical	সামান্তরিক	Parallelogram
ষট্‌পুষ্ঠ	Hexahedron	সামান্তরিক পৃষ্ঠ	Parallelopiped
ষড়্‌ভুজ	Hexagon	সাম্য	Identity
সংখ্যা	Number	সিদ্ধান্ত	Conclusion
পট্টন	Numeration	হ্রস্বক	Index
লিখন	Notation	সোজা কলক	Right Prism
সংযোগ	Combination	গুণ	Cylinder
সঙ্কীর্ণ	Contracted	সোজা	right
	(operation)	স্পর্শ	Contact
সঙ্গত	Congruent, consisteat	স্পর্শিনী	Tangent
সদৃশ	Similar	স্বতন্ত্র	Axiom
সমকোণ	Right angle	সীকৃত কথা	Postulate
সমতল	Plane	হর	Denominator

পরিশিষ্ট ।

ইংরাজি গণিতের ভাগত্রয়ে যে সকল ইংরাজি
পান্নিভাষিক শব্দের বাঙ্গালা প্রতিশব্দ
ব্যবহৃত হইয়াছে তাহাদের
ইংরাজি বর্ণমানানু-
ক্রম সূচী ।

ইংরাজি শব্দ	বাঙ্গালা প্রতিশব্দ	ইংরাজি শব্দ	বাঙ্গালা প্রতিশব্দ
Abstract	অনবচ্ছিন্ন	Axiom	বক্তাসিদ্ধ
Addition	যোগ	Base (of a logarithm)	ভিত্তি
Alligation	মিশ্রণ নিয়ম	(of a figure)	ভূমি
Alternando	একান্তর ক্রমে	Binomial	দ্বিপদ
Alternate	একান্তর	Theorem	শক্তিপ্রসারণ
Altitude	উচ্চতা	Bracket	বন্ধনী
Angle	কোণ	Centre	কেন্দ্র
acute	দৃশ	Chain Rule	শৃঙ্খল নিয়ম
adjacent	সন্নিহিত	Chord	জ্যা
alternate	একান্তর	Circle	বৃত্ত
dihedral	দ্বিপৃষ্ঠা	Circumference	পরিধি
exterior	বাহিরের	Circumscribed	বহিঃস্থিত
interior	অন্তরের	Coefficient	গুণক
obtuse	স্থূল	literal	আক্ষরিক
re-entrant	বিকল্প	numerical	সাংখ্য
right	সম	Collinear	এক রেখায়
solid	ঘন	Combination	সংযোগ
supplementary	পরিপূরক	Commensurable	পরিমেষ
tetrahedral	চতুষ্পৃষ্ঠা	Componendo	যোগক্রমে
triheral	ত্রিপৃষ্ঠা	Compound	
Antecedent	অগ্রগণ, পূর্বগণ	Addition	মিশ্র যোগ
Approximate	আসন্ন	Division	ভাগ
Arc	চাপ	Multiplication	গুণন
Area	ক্ষেত্রফল	Subtraction	বিয়োগ
Arithmetic	পাদীগণিত	Concrete	অবচ্ছিন্ন
Arithmetic mean	সমান্তর মধ্যম	Concurrent	একবিন্দুস্বামী
Arithmetical		Concyclic	সমপরিধি
Progression	সমান্তর শ্রেণী		

Cone	বৃত্তশৃঙ্গী	Expansion of power	শক্তিপ্রসারণ
right	সোজা	Exponential series	শক্তিগুণক শ্রেণী
Congruent	সদৃশ	Expression	অবয়ব
Consequent (of a ratio)	পরশব্দ, পশ্চাদ্ধাব	Even	• বুখ
Constant	নিত্য	Face	পৃষ্ঠ
Construction	অঙ্কন	Factor	উৎপাদক
Contact	স্পর্শ	Figure	অঙ্ক
Contracted (operation)	সঙ্ক্ষিপ্ত	Figure	ক্ষেত্র
Converse	পরিবৃত্ত	rectilinear	কল্পরৈখিক
Convex	কুম্ভ	regular	সমবাণ সমানকোণী
Corollary	অনুমান	Formula	সাহিত্যিক বাক্য
Cube	ঘনক্ষেত্র	Fraction	ভগ্নাংশ
root	মূল	complex	জটিল
Decimal	দশমিক	improper	অগ্রকৃত
Denominator	হর	mixed	মিশ্র
Diagonal	কর্ণ	proper	গ্রহীত
Diameter	ব্যাস	vulgar	সামান্ত
Difference	অঙ্কর, বাকি	Geometrical	
Discount	ডিস্কাউন্ট	Progression	সমগুণ শ্রেণী
Dissimilar	বিষম	Geometric mean	সমগুণ মধ্যম
Dividend	ভাজ্য	Geometry	জ্যামিতি
Dividendo	বিয়োগক্রমে	Greatest Common Measure	গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক
Division	ভাগ	Harmonical	
Divisor	ভাজক	Progression	লব শ্রেণী
Dodecahedron	দ্বাদশপৃষ্ঠ	Harmonic mean	লব মধ্যম
Duplicate ratio	বিঘাত, দ্বিতীয় অনুপাত	Hexagon	ষড়ভুজ
Equation	সমীকরণ	Hexahedron	ষটপৃষ্ঠ
Quadratic	বিশক্তি	Homologous	সমভাবী, সমদীর্ঘ
Simple	সরল	Hypotenuse	কর্ণ
Simultaneous	সমবর্তী	Hypothesis	কল্পনা
with one		Icosahedron	বিংশতিপৃষ্ঠ
unknown	অজ্ঞ	Identity	সাম্য
		Imaginary	কাল্পনিক রাশি,
		quantity	ভাবনিক রাশি

Inclination	অবনতি	Mixed quantity	মিশ্ররাশি
Incommensurable	অপরিমের	Multiple	গুণিতক, ভাগ্য
Index	শক্তিচূচক, সূচক	Multiplicand	ভাগ্য
Inequality	বৈষম্য	Multiplication	গুণন
Infinity	অনন্ত	Multipplier	গুণক
Inscribed	অন্তরঙ্কিত	Multiplication Table	নামতা
Integer	অখণ্ড সংখ্যা	Necessary	অবশ্যজ্ঞাবী
Interest	স্বত্ব	Negative quantity	ঋণরাশি
Compound	চক্রবৃদ্ধি	sign	চিহ্ন
Intersection	সম্পাত	Non-congruent	অসঙ্গত
Intersecting	সম্পাতী	Notation	অঙ্কলিখন
Inversion	বিপর্যয়	Number	সংখ্যা, রাশি
Invertendo	বিপর্যয় ক্রমে	Numeration	সংখ্যাপঠন
Involution	ঘাতাবেশ	Numerator	লব
Irrational quantity	অরূপরাশি	Octagon	অষ্টভুজ
Isosceles triangle	সমদ্বিভাচ ত্রিভুজ	Octahedron	অষ্টপৃষ্ঠ
Known	নির্দাত	Odd	অবৃদ্ধ
Least Common		Parallel	সমান্তর
Multiple	লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক	Parallelogram	সামান্তরিক
Line	বেধা	Parallelopiped	সামান্তরিক পৃষ্ঠ
straight	কঙ্ক	Perimeter	পারিধি
curved	কুটিল	Permutation	অন্তর
Linear	রৈখিক	Perpendicular	লম্ব
Locus	নিরন্তরস্থান	Plane	সমতল
Logarithm	লগসংখ্যা	Point	বিন্দু
Mathematical		Polygon	বহুভুজ
Induction	গণিতের সাধারণত্ব	Positive quantity	ধনরাশি
Maximum	গরিষ্ঠ কল	sign	চিহ্ন
Mean	মধ্যম	Postulate	বাক্য কথ্য
arithmetic	সমান্তর	Power	শক্তি
geometric	সমগুণ	Practice	সাধিতিক
harmonic	লগ	Prime number	মৌলিকসংখ্যা
proportional	মধ্যসংখ্যাসম্পাতী	Prism	কলক
Measure	গুণনীয়ক, ভাগক	Problem	সমস্যা
Minimum	লঘিষ্ঠ কল	Product	গুণফল
Minuend	বিয়োজন		

Projection	প্রক্ষেপণ	Similar term	সমপদ
Proportion	সমাপুণাত	Simple equation	একবর্ষসমীকরণ
Proportional mean	সমাপুণাতী মধ্য	Simultaneous equation	সমবর্তী সমীকরণ
Quadratic equation	বিশক্তি সমীকরণ	Solid angle	ঘন কোণ
Quadrilateral	চতুর্ভুজ	figure	বদায়তন
Quantity	রাশি	Sphere	গোলক, বর্ভল
Quotient	ভাগফল	Square	সমচতুর্ভুজ, বর্গক্ষেত্র
Radius	ব্যাসার্ধ	root	বর্গমূল
Ratio	অনুপাত	Subtraction	বিয়োগ
Rational quantity	রপরাশি	Subtrahend	বিবোধ্য
Reciprocal	অন্তোন্তক	Sum	যোগফল, সমষ্টি
Rectangle	আয়ত	Summand	বোধ্য
Rectilineal figure	স্বকুঠৈখিক ক্ষেত্র	Surd	করপী
Recurring	পৌনঃপুনিক	Surface	পৃষ্ঠ
Reduction	লঘুকরণ	plane	সমতল
Regular figure	সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্র	Tangent	স্পর্শিতী
Remainder	বিয়োগফল, বাকি	Tetrahedron	চতুর্পৃষ্ঠ
Required	ইষ্ট	Term	পদ
Right angle	সমকোণ	dissimilar	বিষম
Right cone	সোলাবৃত্তহুটী	similar	সম
Right prism	সোলাকলক	Theorem	উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা
Root	মূল	Transposition	পঙ্কনয়ন, সমপোষন
of an equation	দান	Triangle	ত্রিকোণ, ত্রিভুজ
Rule of Three	ত্রৈরাশিক	equilateral	সমবাহু
Secant	খণ্ডিতী, ছেদিতী	isosceles	সমবিবাহ
Sector	বৃত্তক্ষেত্রক	scalene	বিষমবাহ
Segment (of a circle)	বৃত্তখণ্ড	Trihedral	ত্রিপৃষ্ঠা
Series	শ্রেণী	Unitary Method	ঐকিক নিয়ম
Side	বাহ	Unknown quantity	অব্যক্ত বা নির্ণেয় রাশি
of an equation	পক্ষ	Variation	বিশ্লিষণ
Similar figure	সদৃশক্ষেত্র	Volume	ঘনফল

